

## MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

### Topologia I 2014

#### Tehtävät 7.4. alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa opiskellaan mm. täydellisyyttä.

1. (Tehtävä 12:1) Todista lause 12.2.
2. (Tehtävä 12:2) Osoita, että jokainen Cauchy-jono on rajoitettu.
3. (Tehtävä 12:3) Todista, että metrisen avaruuden täydellinen osajoukko on suljettu.
4. (Tehtävä 12:12) Osoita, että Banachin kiintopistelauseen 12.8 todistuksen merkinnöin pätee

$$d(x_n, a) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1).$$

5. (Tehtävä 12:13) Etsi yhtälölle  $x^3 - 7x + 1 = 0$  juuren likiarvo väliltä  $[0, 1]$  soveltamalla Banachin kiintopistelausetta funktioon

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{7}.$$

(Mieti, miten tämä liittyy tutkittavaan yhtälöön!) Muista osoittaa, että kaikki Banachin kiintopistelauseen oletukset ovat voimassa. Kuinka monta iteraatiota tarvitaan, että saadaan ainakin 5 oikeaa desimaalia? Laske ko. likiarvo.

6. Tarkastellaan reaalilukujen joukkoa metrisenä avaruutena, jossa on käytössä tavallinen metriikka (erotuksen itseisarvo.) Oletetaan, että  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ja määritellään jokaiselle  $n = 1, 2, 3, \dots$  funktio  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  yhtälöllä  $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ .

- (a) Oletetaan, että  $f$  on jatkuva. Osoita, että  $f_n \rightarrow f$  pisteittäin.
- (b) Oletetaan, että  $f$  on tasaisesti jatkuva. Osoita, että  $f_n \rightarrow f$  tasaisesti.