MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I, 2014
Tehtävät 3.2. alkavalle viikolle

Tällä kertaa harjoitellaan avoimia joukkoja ja aletaan tunnustella jatkuvia kuvauksia.

1. (Tehtävä 3:2) Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}^2$ on avoin ja $z \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Voiko $A \cup \{z\}$ olla avoin?

2. Osoita, että metrinen avaruus on diskreetti jos ja vain jos sen kaikki osajoukot ovat avoimia. (Ks. kohtaa 3.12. Siellä puhutaan metrisen avaruuden X osajoukon A erakkopisteistä. Mieti ensin, mitä tämä tarkoittaa tapauksessa $A = X$.)

3. (Tehtävä 3:5) Osoita, että metrisen avaruuden osajoukko on kaikkien ympäristöjensä leikkaus. Toisin sanoen, todista seuraava väite: Jos (X, d) on metrinen avaruus ja $A \subset X$, niin kaikilla $x \in X$ pätee

$$x \in A \text{ joss kaikilla joukon } A \text{ ympäristöillä } U \text{ pätee } x \in U.$$

(Miksi nämä kaksi väitettä ovat yhtäpitäviä?)

4. Osoita, että joukko

$$\{x \in \mathbb{R} \mid e^{\sin x} + \sin(e^x) > 7\}$$

on avoin. (Vihje: keskiviikon 29.1. ja torstain 30.1. luennoilla tuli esille se, miten kurssin analyysi I jatkuvat funktiot liittyvät avoimiin joukkoihin. Luvussa 4 tulee sama asia yleisemmässä muodossa.)

5. (Vrt tehtävä 4:2) Tarkastellaan funktiota $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, joka on määritelty yhtälöllä $f(x) = \sqrt{x}$.
(a) Onko f jatkuva?
(b) Onko f Lipschitz?
Tarkat perustelut!

6. (Tehtävä 4:1) Oletetaan, että X ja Y ovat metrisiä avaruuksia, että Y on diskreetti (määritelmä löytyy luvusta 3), ja että $f \colon X \to Y$ on jatkuva. Osoita, että jokaisella pisteellä $x \in X$ on ympäristö, jossa f on vakio. (Vihje: Jokaisen $y \in Y$ yksiö $\{y\}$ on tehtävän tilanteessa avoin - mutta miksi? Siksi sen alkukuva on jatkuvuuden nojalla avoin. Kuuluuko jokainen $x \in X$ johonkin näistä yksiöiden alkukuvajoukoista?)