HY Todennäkösyysteoria III, harjoitustehtävät 3, kevät 2014 5.2.2014

1. Laske karakteristinen funktio $\varphi_X(t) = E_P(\exp(itX))$ kun

   - X on tasaisesti jakautunut välissä $[0,1]$. **R.**

     $$\varphi_X(t) = \int_0^1 \exp(itx)dx = \frac{1}{it}\exp(itx)\Big|_0^1 = \frac{\exp(it)-1}{it} = \frac{\sin(t)}{t} + i\frac{1-\cos(t)}{t}$$

   - X on tasaisesti jakautunut välissä $[-1,1]$.

     $$\varphi_X(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \exp(itx)dx = \frac{1}{2it}\exp(itx)\Big|_{-1}^1 = \frac{\exp(it)-\exp(-it)}{2it}$$
     $$= \frac{\cos(t)+i\sin(t)-(\cos(t)-i\sin(t))}{2it} = \frac{\sin(t)}{t}$$

     Huomataan koska tämä jakauma on symmetrinen nollan ympärillä, karakteristinen funktio on reaali-arvoinen.

     Voidaan myös kirjoittaa

     $$\varphi_X(t) = \varphi_{(2U-1)}(t) = \exp(-it)\varphi_U(2t) = \frac{\exp(it)-\exp(-it)}{i2t} = \frac{\sin(t)}{t}$$

     jossa U on tasaisesti jakautunut välissä $[0,1]$.

   - X on Cauchy jolla on tiheysfunktio $f_X(x) = ((1+x^2)\pi)^{-1}$. **R.**

     $$\varphi_X(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(itx)}{(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(itx)}{(1+ix)(1-ix)}dx$$

     Kuvauskella $z \to \frac{\exp(itz)}{(i+z)(i-z)}$ on kaksi napapistettä $z = \pm i$.

     Olkoon $t > 0$. Kun $R > 1$ ja $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ jossa $\Gamma_1 = \{r + i0 : r \in [-R, R]\}$ ja $\Gamma_2 = \{R\exp(i\theta) : \theta \in [0,\pi]\}$. suljetun käyrän Γ sisällä jää napapiste $+i$.

     Olkoon $z \mapsto f(z) = \frac{\exp(itz)}{(1+z^2)}$.

     $$2i\pi \operatorname{Res}\big(f, +i\big) = 2i\pi \lim_{z\to i} f(z)(z-i) = 2i\pi\frac{\exp(i^2 t)}{2i} = \pi\exp(-t)$$
     $$= \oint_\Gamma f(z)dz = \int_{-R}^{R}\frac{\exp(itx)}{(1+x^2)}dx + \int_0^\pi \frac{\exp(itR(\cos\theta + i\sin\theta))}{1+R^2\exp(2i\theta)} iR\exp(i\theta)d\theta$$
     $$= \int_{-R}^{R}\frac{\exp(itx)}{(1+x^2)}dx + \int_0^\pi \exp(-tR\sin(\theta))\frac{\exp(itR\cos(\theta))}{1+R^2\exp(2i\theta)} iR\exp(i\theta)d\theta$$

jossa koska $t\sin(\theta) \geq 0$ kun $\theta \in [0, \pi]$, kun $R > 1$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^\pi \exp(-tR\sin(\theta)) \frac{\exp(itR\cos(\theta))}{1 + R^2\exp(2i\theta)} iR\exp(i\theta) d\theta \right| \\
&\leq \left| \int_0^\pi \exp(-t\sin(\theta)) \frac{R}{R^2 - 1} d\theta \right|
\end{aligned}$$

jossa integrandi on rajoitettu ja suppenee kohti nollaan $\forall\theta$, kun $R \to \infty$, dominoidun konvergenssi lauseesta seuraa että myös integraali suppenee kohti nollaan.

Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(itx)}{(1 + x^2)} dx := \frac{1}{\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\exp(itx)}{(1 + x^2)} dx = \exp(-t)$$

Koska on kyse todennäköisyysjakauman karakteristisesta funktiosta, on itsestään selvää että integraali suppenee myös absoluttisesti.

Kun $t < 0$ ja $\theta \in [0, 2\pi]$ $t\sin(\theta) \leq 0$ ja $\exp(-tR\sin(\theta))$ kasvaa äärettömiin kun $R \to \infty$. Siksi kannattaa integroida puolitasolla $\text{Im}(z) < 0$.

Otetaan $\Gamma' = \Gamma_1' + \Gamma_2'$ jossa $\Gamma_1 = \{r + i0 : r \in [R, -R]\}$ ja $\Gamma_2 = \{R\exp(i\theta) : \theta \in [\pi, 2\pi]\}$. suljetun käyrän Γ sisällä jää napapiste $-i$.

$$\begin{aligned}
&2i\pi \text{ Res } \big(f, -i\big) = 2i\pi \lim_{z\to -i} f(z)(z + i) = 2i\pi \frac{\exp(-i^2 t)}{-2i} = -\pi\exp(t) = \pi\exp(-|t|) \\
&= \oint_\Gamma f(z)dz = \int_R^{-R} \frac{\exp(itx)}{(1 + x^2)} dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{\exp(itR(\cos\theta + i\sin\theta))}{1 + R^2\exp(2i\theta)} iR\exp(i\theta)d\theta \\
&= -\int_{-R}^{R} \frac{\exp(itx)}{(1 + x^2)} dx + \int_\pi^{2\pi} \exp(-tR\sin(\theta)) \frac{\exp(itR\cos(\theta))}{1 + R^2\exp(2i\theta)} iR\exp(i\theta)d\theta
\end{aligned}$$

jossa koska $t\sin(\theta) \geq 0$ kun $t < 0$ ja $\theta \in [\pi, 2\pi]$. Kun $R > 1$. Seuraa että kun $t < 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(itx)}{(1 + x^2)} dx := \frac{1}{\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\exp(itx)}{(1 + x^2)} dx = \exp(t) = \exp(-|t|)$$

2. Sanotaan että satunnaismuuttujan X jakauma on äärettömasti jaettavissa (infinitely divisible) jos kaikille $n \in N$ on olemassa satunnaismuuttuja $Y_1^{(n)}$ jolla X ja $Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}$ ovat samoin jakautuneita, jossa $Y_i^{(n)}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita.

   Osoita:

   - X on äärettömasti jaettavissa jos ja vain jos kaikille $n \in \mathbb{N}$ kuvaus $t \mapsto \varphi_X(t)^{1/n}$ on karakteristinen funktio,

     R. Olkoon $Y^{(n)}$ satunnaismuuttuja jolla on karkateristinen funktio $\varphi_X(t)^{1/n} = \varphi_{Y^{(n)}}$, seuraa että

     $$E_P\left(\exp(it\sum_{i=1}^{n} Y^{(n)}\right) = \varphi_{Y^{(n)}}(t)^n = \varphi_X(t)$$

   - Gaussinen jakauma $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ on äärettömästi jaettavissa. **R.** Jos $X = \mu + \sigma G$ jossa G on standardi Gaussinen, $E(G) = 0$, $E(G^2) = 1$, sen karakteristinen funktio on $\varphi_X(t) = \exp\bigl(it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\bigr)$, Jos

     $$Y^{(n)} = \mu n^{-1} + \sigma n^{-1/2} G$$

     seuraa $\varphi_{Y^{(n)}}(t)^n = \varphi_X(t)$.

   - Poissonin jakauma parametrilla $\lambda > 0$ on äärettömästi jaettavissa.

     R. Kun $P_\lambda(X = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$, seuraa

     $$\varphi_\lambda(t) = E_\lambda\bigl(\exp(itX)\bigr) = \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\exp(it)\lambda)^k}{k!} = \exp\Bigl(\lambda\bigl(e^{it} - 1\bigr)\Bigr)$$

     Koska

     $$\varphi_{\lambda/n}(t)^n = \varphi_\lambda(t)$$

     siitä seuraa että Poissonin jakauma on äärettömästi jaettavissa.

3. Sanotaan että satunnaismuuttujan X jakauma on vaaka, silloin kun kaikille $a, b \in \mathbb{R}$ $(aX_1(\omega) + aX_2(\omega))$ on samoin jakautunut kuten $(cX(\omega) + d)$ jollekin $c, d \in \mathbb{R}$, jossa X_i $i = 1, 2$ ovat rippumattomia ja jakautuneita kuten X.

- Osoita että gaussinen jakauma $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ on vaaka. **R.**

  $$\varphi_{aX_1+bX_2}(t) = \varphi_{(a+b)\mu+\sigma\sqrt{a^2+b^2}G}(t)$$

  jossa G on standardi Gaussinen muuttuja.

- Osoita että jos karakteristinen funktio on muotoa

  $$\varphi_X(t) = \exp(it\mu - |\beta t|^\alpha),$$

  jakauma on vaaka. **R.**

  $$\varphi_{aX_1+bX_2}(t) = \varphi_X(at)\varphi_X(bt) = \exp\big(i(a+b)t\mu - (|a|^\alpha + |b|^\alpha)\,|\beta t|^\alpha\big)$$
  $$= \exp\big(iBt - |\beta t A|^\alpha\big) = \varphi_{B+AX}(t)$$

  jossa $B = (a+b)$ $A = \big(|a|^\alpha + |b|^\alpha\big)^{1/\alpha}$.

4. Olkoon $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. satunnaismuuttujat joilla on tiheysfunktio

   $$f_X(x) = \frac{(1-\cos x)}{\pi x^2}.$$

   - Tarkista että $f_X(x)$ on todennäköisyysjakauman tiheysfunktio.
   - Laske X:n karakteristinen funktio

     R. Vihjeet löytyvät Williamsin kirjasta (E.18.1), katso karakteristen funktioiden taulukosta 16.7.

     Jos U on tasaisesti jakautunut välissä $[-1, 1]$ sen karakteristinen funktio on $\varphi_U(t) = \sin(t)/t$. Huomataan että se on $\mathbb{R}$-arvoinen koska jakauma on symmetrinen.

     $V = U/2$ on sitten tasaisesti jakautunut välissä $[-1/2, 1/2]$ ja sen karakteristinen funktio on $\varphi_V(t) = 2\sin(t/2)/t$.

     Jos V' on P-rippumaton ja samoin jakautunut kuten V,

     $$\varphi_{V+V'}(t) = \varphi_V(t)^2 = \frac{4\sin(t/2)^2}{t^2} = \frac{2(1-\cos(t))}{t^2}$$

Seuraa myös että $(V + V')$ tiheysfunktio on tiheysfunktioiden konvoluutio:

$$f_{V+V'}(x) = \mathbf{1}(x \in [-1,1]) \int_{\mathbb{R}} 1_{[-1/2,1/2]}(x-y)dy$$
$$= (1-|x|)\mathbf{1}(x \in [-1,1]) = (1-|x|)^+$$

Lévy inversio kaavasta saadaan:

$$f_{V+V'}(x) = (1-|x|)^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_{V+V'}(t)dt$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \frac{(1-\cos(t))}{t} dt$$

Kun $x = 0$ siitä seuraa

$$\pi = \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\cos(t))}{t} dt$$

Siis $f_Y(t) = \frac{(1-\cos(t))}{\pi t}$ on todennäjköisyys jakauma $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:llä Sen karakteristinen funktio on

$$\varphi_Y(y) = (1-|y|)\mathbf{1}(y \in [-1,1]) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ity} \frac{(1-\cos(t))}{t} dt$$

- Osoita

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \leq x \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x)$$

R.

Jos $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat i.i.d. ja samoin jakautuneita tiheysfunktiolla $f_Y(t)$, $\overline{S}_n = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$,

$$\varphi_{\overline{S}_n}(t) = (1-|y/n|)^n \mathbf{1}(y \in [-n,n]) \to \exp(-|y|)$$

joka on Cauchy jakauman karakteristinen funktio jolla on kertymäfuntio

$$P(Z \leq t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(t)$$

Tämä seuraa koska kun Z on Cauchy jakautunut, muuttujan vaihdolla $x = \tan(\theta)$

$$P(Z \leq t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\arctan(t)} \cos(\theta)^2 \frac{1}{\cos(\theta)^2} d\theta = \frac{\arctan(t)}{\pi} + \frac{1}{2}$$