HY Todennäkösyysteoria III, harjoitustehtävät 5, kevät 2014 12.2.2014

1. Olkoon $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ i.i.d. satunnausmuuttujat kertymäfunktiolla $F(t) = P(X_1 \le t)$.

   Otoksen $(X_1, \dots, X_n)$ Empiirinen jakauma on satunnaisprosessi

$$F_n(t,\omega) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(X_i(\omega) \le t) \qquad n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}$$

   (a) Osoita: $E_P(F_n(t)) = F(t)$.

   (b) : osoita $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$F_n(t,\omega) \to F(t)$$

   P m.v. kun $n \to \infty$.

   (c) Todista Glivenko-Cantelli lemma

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t,\omega) - F(t)| \to 0$$

   P m.v. kun $n \to \infty$.

   Vihje osoita ensin että

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t,\omega) - F(t)| = \sup_{q\in\mathbb{Q}} |F_n(t,\omega) - F(t)|$$

   F_n ja F ovat oikelta jatkuvia.

   Huomataan että kun $a \le t \le b$,

$$F_n(a) - F(a) + F(a) - F(b) \le F_n(t) - F(t) \le F_n(b) - F(b) + F(b) - F(a)$$

   josta seuraa

$$|F_n(t) - F(t)| \le |F_n(b) - F(b)| \wedge |F_n(a) - F(a)| + |F(b) - F(a)|$$

   (d) Laske kovarianssi

$$\mathrm{Cov}(F_n(t), F_m(s)) = E_P\big\{\big(F_n(t,\omega) - F(t)\big)\big(F_m(s,\omega) - F(s)\big)\big\}$$

   for $n, m \in \mathbb{N}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

(e) Osoita että kun $s, t \in R$

$$\left(\sqrt{n}(F_n(s) - F(s)), \sqrt{n}(F_n(t) - F(t))\right) \xrightarrow{d} (G(s), G(t))$$

jossa satunnais-pari $(G(s), G(t))$ on gaussinen. Mitkä ovat $E(G(t))$, $E(G(s)G(t))$?

2. Olkoon

$$e_k(t) = \frac{1}{2\pi} \exp(ikt), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t \in (-\pi, \pi]$$

(a) Osoita että $\{e_n : n \in Z\}$ ovat ortonormaalisia $L^2((-\pi, \pi], dt)$ avaruudessa eli.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ikt) dt = \mathbf{1}(k = 0) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

(b) Olkoon $X(\omega)$ satunnaismuuttuja jolla $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$, karakteristella funktiolla $\varphi_X(t)$.

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_X(t) \exp(-ikt) dt \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

(c) Olkoon $S_n(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$ jossa $X_1, \ldots, X_n$ ovat P-riippumattomia kopioita satunnaimuuttujasta $X(\omega) \in \mathbb{Z}$. Osoita

$$P(S_n = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\varphi_X(t)\big)^k \exp(-ikt) dt \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$