HY Todennäkösyysteoria III, harjoitustehtävät 4, kevät 2014 12.2.2014

1. Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ riippumatomien satunnaismuututujen jono, jossa

   $$P(X_j = k) = \exp(-\lambda_j)\frac{\lambda_j^k}{k!}$$

   siis X_j on Poisson(λ_j) jakautunut jossa $\lambda_j > 0$.

   Oletamme

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n} = \lambda \in (0, +\infty)$$

   Osoita että satunnaismuuttujen jono

   $$\frac{1}{\sqrt{n}}\big(X_1 + \cdots + X_n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\big)$$

   suppenee jakauman mielessä ja määrä rajajakauma. **Vihje:** muista Lindebergin keskeinen raja-arvo lause

2. Olkoon X_k, $k = 0, 1$ riippumattomia ja standardi gaussisia, jolla $E(X_i) = 0$ ja $E(X_i^2) = 1$.

   Osoita että $Y = \frac{X_0+X_1}{\sqrt{2}}$ on standardi gaussinen laskemalla tiehysfunktioiden konvoluutiota:

   $$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h\big(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\big)\phi(x)\phi(y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} h\big(x\big)\phi(x)dx$$

   jossa $h(x)$ on testifunktio ja $\phi(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-\frac{1}{2}x^2)$ on standardi gaussinen tiehysfunktio.

   Vihje Muuttujan vaihdolla.

3. Todennäköisyys avaruudessa $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, olkoon

   $$\mathcal{P} = \Big\{ \text{todennäköisyys mitat } Q \text{ jolla}$$
   $$E_Q(X) = \int_{\mathbb{R}} x\ Q(dx) = 0, E_Q(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 Q(dx) = 1\Big\}$$

Kun $Q \in \mathcal{P}$ määritellään kuvaus $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ jolla

$$(TQ)(B) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) Q(dx) Q(dy) = E_{Q \otimes Q} \left(\mathbf{1}_B \left(\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \right) \right), \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

on todennäköisyys. Tässä X_1 ja X_2 ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita jakaumalla Q.

Osoita että standardi gaussinen jakauma $\gamma(dx)$ on T kuvauksen kiinteä piste eli $T\gamma = \gamma$, ja on attraktiiven $\mathcal{P}$ joukossa, eli

$\forall \ Q \in \mathcal{P}, \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \to \infty} (T^n Q)(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B (x) \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right) dx$$

4. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $N_\lambda(\omega)$ Poisson(λ) jakautunut, jossa $\lambda > 0$, siis

$$P(N = k) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$$

ja $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujen jono jossa

$$P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = p \in (0,1)$$

- Olemme jo laskeneet $E_P(X_n) = \lambda$ ja $E_P(X_n^2) = \lambda^2 + \lambda$.

  Oletamme $N_\lambda(\omega) \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} (X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$
  Olkoon

  $$S_n(\omega) = X_1 + \cdots + X_n(\omega) \text{ ja}$$
  $$S_{N_\lambda(\omega)}(\omega) = X_1 + \cdots + X_{N_\lambda(\omega)}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(X_k(\omega) \mathbf{1}(X_k(\omega) \le N_\lambda(\omega)) \Big) \ ,$$

  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja jatkuva testifunktio, ja $G(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1)$ standardi gaussinen satunnaismuuttuja.

- Osoita:

$$\lim_{n\to\infty} E_P\left(f\left(\frac{S_{N_\lambda} - pN_\lambda}{\sqrt{N_\lambda p(1-p)}} \right) \middle| N_\lambda = n \right) = E_P\big(f(G)\big)$$

  jossa ehdollinen odotusarvo on elementaarinen, siinä mielessä että ehdollistetään tapahtumaan jolla on positiivinen todennäköisyys. Muista keskeinen raja-arvo lause

- Osoita:

$$\lim_{\lambda\to\infty} E_P\left(f\left(\frac{S_{N_\lambda} - pN_\lambda}{\sqrt{N_\lambda p(1-p)}} \right) \middle| \sigma(N_\lambda) \right)(\omega) \xrightarrow{P} E_P\big(f(G)\big)$$

  jossa λ on satunnaismuuttujan $N_\lambda(\omega) : n$ Poissonin parametri ja suppeneminen on stokastinen konvergenssin mielessï¿½.

- Osoita

$$\lim_{\lambda\to\infty} E_P\left(f\left(\frac{S_{N_\lambda} - pN_\lambda}{\sqrt{N_\lambda p(1-p)}} \right) \right) = E_P\big(f(G)\big)$$

  Muista $L^1(P)$ konvergenssin karakterisaatio.

  Vihje Jos haluat kayttää melkein varmaa konvergenssia tarvittaessa voit olettaa että on olemassa satunnaismuuttujen kokoelma $\{N_\lambda(\omega) : \lambda > 0\}$, jossa P: mitan suhteen $N_\lambda(\omega)$ on Poisson(λ)-jakautunut , ja $\lim_{\lambda\uparrow\infty} N_\lambda(\omega) = +\infty$ P-melkein varmasti.