HY Todennäkösyysteoria III, harjoitustehtävät 3, kevät 2014 5.2.2014

1. Laske karakteristinen funktio $\varphi_X(t) = E_P(\exp(itX))$ kun

   - X on tasaisesti jakautunut välissä $[0, 1]$.
   - X on tasaisesti jakautunut välissä $[-1, 1]$.
   - X on Cauchy jolla on tiheysfunktio $f_X(x) = ((1 + x^2)\pi)^{-1}$.

2. Sanotaan että satunnaismuuttujan X jakauma on äärettömasti jaettavissa (infinitely divisible) jos kaikille $n \in N$ on olemassa satunnaismuuttuja $Y_1^{(n)}$ jolla X ja $Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}$ ovat samoin jakautuneita, jossa $Y_i^{(n)}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita.

   Osoita:

   - X on äärettömasti jaettavissa jos ja vain jos kaikille $n \in \mathbb{N}$ kuvaus $t \mapsto \varphi_X(t)^{1/n}$ on todennäköisyysjakauman karakteristinen funktio.
   - Gaussinen jakauma $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ on äärettömästi jaettavissa.
   - Poissonin jakauma paramterilla $\lambda > 0$ on äärettömästi jaettavissa.

3. Sanotaan että satunnaismuuttujan X jakauma on vaaka, silloin kun kaikille $a, b \in \mathbb{R}$ $(aX_1(\omega) + aX_2(\omega))$ on samoin jakautunut kuten $(cX(\omega) + d)$ jollekin $c, d \in \mathbb{R}$, jossa X_i $i = 1, 2$ ovat rippumattomia ja jakautuneita kuten X.

   - Osoita että gaussinen jakauma $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ on vaaka.
   - Osoita että jos karakteristinen funktio on muotoa

     $$\varphi_X(t) = \exp(it\mu - |\beta t|^\alpha)$$

     jakauma on vaaka.

4. Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. satunnaismuuttujat joilla on tiheysfunktio

   $$f_X(x) = \frac{(1 - \cos x)}{\pi x^2}.$$

- Tarkista että $f_X(x)$ on todennäköisyysjakauman tiheysfunktio.
- Laske X:n karakteristinen funktio
- Osoita

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \leq x\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$$