HY Todennäkösyysteoria III, harjoitustehtävät 1, kevät 2014

1. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon $\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ riippumattomia ja samoin jakautuneita jossa

$$P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = p \in (0,1)\ .$$

Olkoon $S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega) \quad n \in \mathbb{N}$.

Olkoon $p < a < 1$. Osoita suurten poikkeamien yläraja:

$$\begin{aligned} P\big(S_n > an\big) &\le \left(\frac{p}{a}\right)^{na}\left(\frac{1-p}{1-a}\right)^{n(1-a)} \\ &= \exp\left\{-n\big(a\log\big(\frac{a}{p}\big) + (1-a)\log\big(\frac{1-a}{1-p}\big)\big)\right\} \\ &= \exp\big\{-nK(P_a|P_p)\big\} \end{aligned}$$

jossa (tiedoksi vaan, tätä tietoa ei tarvitse käyttää)

$$K(P_a|P_p) := \sum_{\omega=0,1} P_a(\{\omega\})\log\big(\frac{P_a(\{\omega\})}{P_p(\{\omega\})}\big)$$

on P_p:n suhteellinen entropia P_a:n suhteen.

Vihje: kun $\theta > 0$

$$P(S_n > an) = P\big(\exp(\theta S_n) > \exp(\theta an)\big)$$

Käytetään ensin Chebychevin epäyhtälöä ja sitten optimoidaan θ:n suhteen.

2. Olkoon $\overline{S}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ jossa X_i ovat P-riippumattomia ja samoin jakautuneita.

Laske Cramerin lauseen avulla

$$-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(\overline{S}_n > x)$$

silloin kun

- $X_1(\omega)$ on 1-eksponentiaalinen, eli $P(X_t > x) = \exp(-x)$ kun $x \geq 0$. Huomaat että $E_P(X_1) = 1 > 0$
- $X_1(\omega) = G(\omega)$ jossa $G(\omega)$ on standardi gaussinen, $E_P(G) = 0, E_P(G^2) = 1$.

  Tässä tapauksessa $\overline{S}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ on Gaussinen jolla $E_P(\overline{S}_n) = 0$, $E_P(\overline{S}_n^2) = 1/n$.
- $X_1(\omega) = G(\omega)^2$ jossa $G(\omega)$ on standardi gaussinen, $E_P(G) = 0, E_P(G^2) = 1$.
- $X_1(\omega)$ on Poisson(λ) jakautunut, eli

$$P(X_1 = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} \text{ kun } k \in \mathbb{N}$$

3. Olkoon $U(\omega)$ tasaisesti jakautunut $[0,1]$ välissä, ja $(X_i : i \in \mathbb{N})$ jono ehdollisesti riippumattomia satunnaismuuttujia σ-algebran $\sigma(U)$:n ehdolla, jolla $\forall n, f_1, \dots, f_n$

$$E_P(f_1(X_1)\dots f_n(X_n)|\sigma(U))(\omega) = \left\{ \prod_{i=1}^n E_P(f_i(G+u)) \right\}\Bigg|_{u=U(\omega)}$$

jossa G on standardi gaussinen jolla $E(G) = 0$,$E(G^2) = 1$. Toisin sanoen, X_i ovat ehdollisesti rippumattomia ja gaussisia samalla ehdollisella odotusarvolla $U(\omega)$ ja ehdollisella variansilla 1.

Olkoon $\bar{S}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

Laske

$$\lim_n -\frac{1}{n}\log P(\bar{S}_n > x)$$

Vihje Laske ensin

$$\lim_n -\frac{1}{n}\log P(\bar{S}_n > x|U = u)$$

ja huomaat että

$$P(\bar{S}_n > x) = \int_0^t P(\bar{S}_n > x|U = u)du$$

Olkoon $I(x|U=u)$ ehdollisen jakauman vauhti funktio

Käytä Taylorin approksimaatiota: kun $u \in [0,1]$

$$I(x|u) \sim I(x|U=\hat{u}_x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 u} I(x|U=u)\bigg|_{u=\hat{u}_x} (u-\hat{u}_x)^2$$

jossa

$$\hat{u}_x = \arg\min_{u\in[0,1]} I(x|u)$$

4. Osoita että kun funktio $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja keskipiste-konveksi

$$h\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \frac{h(x)+h(y)}{2}$$

siitä seuraa että $h(x)$ on konveksi. (Emme oleta että h olisi ei-vähenevä!)

Katso Teoreema 14.0.1 todistuksen luentomonistesta.

5. Todista lemma 14.0.3 luentomonisteesta:

Olkoon $f(t), g(t)$ jatkuvia funktioita kompaktissa K, ja

$$f^* = \sup_{t\in K} f(t), \quad g^* = \sup_{t\in K} g(t) \; .$$

Silloin

$$|f^* - g^*| \le \sup_{t\in K} |f(t) - g(t)| = \| f - g \|_\infty$$