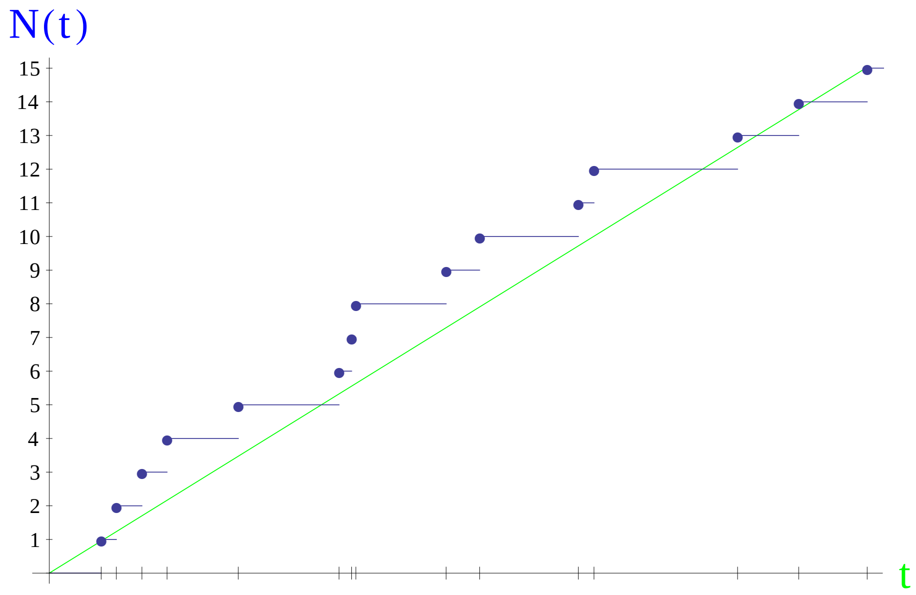


KUVA III.2. Poisson-prosessi $[0, \infty)$:llä.

2. Poisson-prosessi

2.1. Poisson-prosessin määrittelevät ominaisuudet

Edellä tarkastelimme tärkeintä jatkuva-aikaista[1] jatkuva-polkuista[2] satunnaisprosessia, Brownin liikettä. Tämän luvun aihe on vastaavasti tärkein jatkuva-aikainen hyppyprosessi[3], Poisson-prosessi.

Poisson-prosessi $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ on eräänlainen "laskuriprosessi" tai "saapumisprosessi", jonka arvo N_t ajanhetkellä t kertoo kuinka monta satunnaista "tapausta" on havaittu hetkeen t mennessä tai kuinka monta "asiakasta" on tuolloin "saapunut". Kuvassa III.2 on havainnollistettu tällaista laskuriprosessia: aika-akselille on merkitty saapumisten satunnaiset ajankohdat, ja prosessissa tapahtuu epäjatkuva hyppäys näillä ajanhetkillä.

Poisson-prosessin tärkeys ja soveltuvuus lukemattomien erilaisten asioiden mallintamiseen perustuu paljolti siihen, että se voidaan karakterisoida hyvin yleisin oletuksin. Laskuriprosessilta tulee ensinnäkin vaatia

- $N_0 = 0$
- $N_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ kaikilla $t \geq 0$
- $t \mapsto N_t$ on ei-vähenevä ja oikealta jatkuva.

---

[1]Sanomme satunnaisprosessia $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jatkuva-aikaiseksi, jos aikaparametrin t indeksijoukko $\mathcal{T}$ on reaaliakseli $\mathbb{R}$ tai jokin reaaliakselin väli, tavallisimmin $\mathcal{T} = [0, \infty)$. Jos $\mathcal{T}$ on kokonaislukujen joukko tai kokonaislukuväli — tai yleisemmin jokin diskreetti $\mathbb{R}$:n osajoukko — sanomme prosessia diskreettiaikaiseksi.

[2]Jatkuva-aikaista satunnaisprosessia $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sanotaan jatkuva-polkuiseksi, jos satunnainen kuvaus $t \mapsto X_t$ on (melkein varmasti) jatkuva.

[3]Jatkuva-aikaista satunnaisprosessia $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ sanotaan hyppyprosessiksi, jos satunnainen kuvaus $t \mapsto X_t$ on (melkein varmasti) oikealta jatkuva ja vakio diskreetin pistejoukon komplementin yhtenäisissä komponenteissa.

Huomautus III.25. Laskuriprosessin spesifioimiseksi käytämme yleensä — kuten Brownin liikkeen tapauksessakin — prosessin äärellisulotteisia jakaumia, eli vektorien

$$(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_n})$$

yhteisjakaumia, missä $n \in \mathbb{N}$ ja $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ovat mielivaltaiset. Koska laskuriprosessin arvojoukko $\mathbb{Z}_{\ge 0}$ on diskreetti, konkreettisesti riittää antaa vaikkapa muotoa $\mathsf{P}[N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_n} = k_n]$ olevat todennäköisyydet. Numeroituvilla yhdisteillä ja leikkauksilla voidaan sitten ilmaista kaikki muotoa $\{N_r \in R_r \ \forall r \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)\}$ olevat tapahtumat, ja oikealta jatkuvan prosessin tunteminen rationaalipisteissä spesifioi prosessin täysin.

Yleisten laskuriprosessin ominaisuuksien lisäksi teemme seuraavat oletukset, joiden voidaan tulkita ilmaisevan sen, että prosessi on mahdollisimman epäennustettava (termiä “täysin satunnainen” käytetään toisinaan):

- *Riippumattomat lisäykset*: Saapumiset erillisillä aikaväleillä ovat toisistaan riippumattomia

$$\forall\, s_1 < t_1 \le s_2 < t_2 \le \cdots \le s_n < t_n \ : \quad \big(N_{t_j} - N_{s_j}\big)_{j=1,\dots,n} \ \perp\!\!\!\perp \,. \tag{PP:$\perp\!\!\!\perp$}$$

- *Stationaariset lisäykset*: Aikavälillä $(s, s+h]$ tapahtuvien saapumisten lukumäärän jakauma riippuu vain välin pituudesta h

$$\forall\, s_1, s_2, h : \qquad N_{s_1+h} - N_{s_1} \ \sim \ N_{s_2+h} - N_{s_2}. \tag{PP:$\sim$}$$

- *Intensiteetti*: Todennäköisyys yhdelle saapumiselle lyhyellä (infinitesimaalisella) aikavälillä on verrannollinen aikavälin pituuteen

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{\mathsf{P}\left[N_{s+h} - N_s = 1\right]}{h} = \lambda. \tag{PP:λ}$$

- *Pisteprosessin yksinkertaisuus*: Todennäköisyys useammalle saapumiselle lyhyellä (infinitesimaalisella) aikavälillä on pienempää kertalukua kuin yhden saapumisen todennäköisyys

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{\mathsf{P}\left[N_{s+h} - N_s > 1\right]}{h} = 0. \tag{PP:$\times$}$$

Oletuksessa (PP:λ) esiintyvää parametria $\lambda \ge 0$ sanotaan Poisson-prosessin intensiteetiksi. Seuraavan lauseen mukaan ylläolevat ehdot määräävät satunnaisprosessin $(N_t)_{t \in [0,\infty)}$. Tätä satunnaisprosessia sanomme (tavalliseksi) Poisson-prosessiksi intensiteetillä λ.

Lause III.26. *Ominaisuudet* (PP:$\perp\!\!\!\perp$), (PP:$\sim$), (PP:λ) *ja* (PP:$\times$) *määräävät yksikäsitteisesti laskuriprosessin* $(N_t)_{t \in [0,\infty)}$ *jakauman. Tälle prosessille pätee* $N_t \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$.

Huomautus III.27. Muistutamme, että $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ tarkoittaa, että $\mathsf{P}[X = k] = \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$. Yhtäpitävästi, kuten Esimerkissä I.46 laskettiin, satunnaismuuttujan karakteristinen funktio on $\chi_X(\theta) = \mathsf{E}[e^{\mathrm{i}\theta X}] = \exp\big((e^{\mathrm{i}\theta} - 1)\lambda\big)$. Silloin $\mathsf{E}[X] = \lambda$, ja lauseesta seuraa, että Poisson-prosessin $(N_t)_{t \in [0,\infty)}$ intensiteetti λ voidaan infinitesimaalisen todennäköisyystulkinnan (PP:λ) lisäksi ymmärtää myös saapumisten lukumäärän odotusarvona aikayksikköä kohti $\lambda = \frac{1}{h} \mathsf{E}[N_{t+h} - N_t]$.

Todistus. Riittää osoittaa jälkimmäinen väite, $N_t \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. Nimittäin stationaarisuudesta (PP:$\sim$) saadaan tämän avulla lisäysten $N_{s+t} - N_s$ jakauma, ja riippumattomista lisäyksistä (PP:$\perp\!\!\!\perp$) saadaan sitten yhteisjakaumat muotoa $(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_n})$ oleville vektoreille, eli kaikki prosessin $(N_t)_{t \in [0,\infty)}$ äärellisulotteiset jakaumat.

Kun $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, jaetaan N_t osalisäyksiin

$$X_j^{(n)} = N_{\frac{j}{n}t} - N_{\frac{j-1}{n}t}.$$

Silloin $N_t = \sum_{j=1}^n X_j^{(n)}$ ja satunnaismuuttujat $X_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, ovat oletuksen (PP:$\perp\!\!\!\perp$) perusteella riippumattomat, ja oletuksen (PP:$\sim$) perusteella samoin jakautuneet. Löytääksemme satunnaismuuttujan N_t jakauman, laskemme sen karakteristisen funktion $\chi(\theta)$, jonka kirjoitamme osalisäysten $X_j^{(n)}$ karakterististen funktioiden $\chi^{(n)}(\theta)$ avulla. Osalisäysten karakteristinen funktio on

$$\chi^{(n)}(\theta) = \mathsf{E}\Big[e^{\mathrm{i}\theta X_j^{(n)}}\Big] = \mathsf{P}\big[X_j^{(n)} = 0\big] + e^{\mathrm{i}\theta}\mathsf{P}\big[X_j^{(n)} = 1\big] + \sum_{k=2}^{\infty} e^{\mathrm{i}k\theta}\mathsf{P}\big[X_j^{(n)} = k\big],$$

jota voidaan oletusten (PP:λ) ja (PP:$\times$) perusteella approksimoida seuraavasti

$$\chi^{(n)}(\theta) = 1 - \lambda\frac{t}{n} + e^{\mathrm{i}\theta}\lambda\frac{t}{n} + o\big(\frac{1}{n}\big).$$

Riippumattomuuden perusteella voidaan kirjoittaa

$$\chi(\theta) = \mathsf{E}\Big[e^{\mathrm{i}\theta N_t}\Big] = \mathsf{E}\Big[e^{\mathrm{i}\theta \sum_j X_j^{(n)}}\Big] = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{E}\Big[e^{\mathrm{i}\theta X_j^{(n)}}\Big] = \big(\chi^{(n)}(\theta)\big)^n,$$

ja edellisen approksimaation ja Lemman I.45 avulla saamme

$$\big(\chi^{(n)}(\theta)\big)^n = \big(1 + \frac{\lambda t(e^{\mathrm{i}\theta} - 1) + o(1)}{n}\big)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\big(\lambda t(e^{\mathrm{i}\theta} - 1).$$

Tämä on Poisson jakauman karakteristinen funktio, parametrina λt, joten jälkimmäinen väite on todistettu. □

Esimerkki III.28. Geiger-mittaria (tai Geiger–Müller -mittaria) käytetään radioaktiivisuuden havaitsemiseen ja mittaamiseen, tarkemmin sanottuna ionisoivan säteilyn mittaamiseen. Mittari pystyy rekisteröimään esimerkiksi alpha-hiukkasen saapumisesta aiheutuneen ionisaation, ja se toimii siten laskurina saapuneille alpha-hiukkasille. Kunhan radioaktiivista ainetta ei ole liikaa ketjureaktioiden käynnistymiseksi, yllä olevat oletukset riippumattomuudesta, samoin jakautuneisuudesta sekä tapausten todennäköisyyksistä lyhyillä aikaväleillä ovat hyvin voimassa, ja Geiger-mittarin laskuriprosessi on olellisesti Poisson-prosessi, jonka intensiteetti λ kertoo säteilyn voimakkuuden.

2.1.1. *Laskuriprosessin vaihtoehtoisia kuvailuja*

Usein käteviä vaihtoehtoisia tapoja kuvailla laskuriprosessi $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ on annettu alla:

- *Saapumishetket*: Prosessin k:s saapumishetki määritellään
$$A_k = \min\big\{t \geq 0 \,\big|\, N_t = k\big\}. \tag{III.11}$$
Selvästi saapumisaikojen jono $(A_k)_{k=1}^\infty$ määrää laskuriprosessin $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$.
- *Odotusajat*: Prosessin k:s odotusaika määritellään
$$T_k = A_k - A_{k-1}. \tag{III.12}$$
Odotusaikojen jono $(T_k)_{k=1}^\infty$ määrää saapumishetket $A_k = \sum_{j=1}^k T_j$ ja siten myös prosessin $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$.
- *Laskurimitta*: Kaikille Borel-joukoille $B \subset [0,\infty)$ merkitsemme $N(B)$ joukossa B olevien hyppäysten lukumäärää. Se määräytyy puoliavointen välien hyppäysten lukumäärästä $N\big((s,t]\big) = N_t - N_s$ ja numeroituvasta additiivisuudesta, ja määrää vastaavasti laskuriprosessin, $N_t = N\big((0,t]\big)$. Siis N voidaan ajatella satunnaisena mittana joukolla $[0,\infty)$. Tämä satunnainen

mitta on (melkein varmasti) lokaalisti äärellinen, puhtaasti diskreetti ja kokonaislukuarvoinen.

Ylläolevista tulkinnoista viimeisestä käytetään usein termiä *(satunnainen) pisteprosessi*. Hieman jäljempänä näemme, miten Poisson-prosessi yleistyy luontevasti satunnaiseksi pisteprosessiksi yleisemmillä avaruuksilla kuin välillä $[0, \infty)$.

2.1.2. *Joitakin Poisson-prosessin perusominaisuuksia*

Mainitsemme seuraavaksi joitakin Poisson-prosessin tärkeitä ominaisuuksia, jotka seuraavat Lauseesta III.26.

Seuraus III.29. *Olkoon $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ Poisson-prosessi intensiteetillä λ. Kuten yllä, merkitään ensimmäisen hyppäyksen satunnaista ajanhetkeä $T_1 = A_1$. Silloin*

$$\mathsf{P}[T_1 > t] = \mathsf{P}[N_t = 0] = e^{-\lambda t},$$

eli ensimmäisen hyppäyksen ajanhetki T_1 on eksponenttijakautunut, $T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Todistus. Koska $N_t \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$, on $\mathsf{P}[N_t = 0] = \frac{1}{0!}(\lambda t)^0 e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$. □

Seuraus III.30. *Olkoon $N = (N_t)_{t\in[0,\infty)}$ Poisson-prosessi intensiteetillä λ, ja $s \in [0, \infty)$. Silloin ajanhetkestä s aloitettu laskuriprosessi, eli kaavalla $N'_t = N_{s+t} - N_s$ määritelty prosessi $N' = (N'_t)_{t\in[0,\infty)}$ on myös Poisson-prosessi intensiteetillä λ, ja se on riippumaton alkuperäisestä prosessista ajanhetkeen s asti, eli kokoelmasta $(N_t)_{t\in[0,s]}$.*

Todistus. Myös prosessi N' toteuttaa selvästi ominaisuudet (PP:$\perp\!\!\!\perp$), (PP:$\sim$), (PP:λ) ja (PP:$\times$). Lisäksi alkuperäisen Poisson prosessin N riippumattomien lisäysten perusteella uusi prosessi N' on riippumaton alkuosasta $(N_t)_{t\in[0,s]}$. □

Propositio III.31. *Olkoon $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ Poisson-prosessi intensiteetillä λ. Ehdollistettuna tapahtumalle $\{N_t = n\}$, prosessin n ensimmäisen saapumishetken pistekokoelma $\{A_k \,|\, k = 1, \ldots, n\} \subset [0, t]$ on jakautunut samoin kuin n riippumattoman välille $[0, t]$ tasaisesti jakautuneen satunnaismuuttujan $(U_j)_{j=1,\ldots,n}$ pistekokoelma $\{U_j \,|\, j = 1, \ldots, n\} \subset [0, t]$.*

Todistus. Pistekokoelman $S \subset [0, t]$ jakauma voidaan ilmaista sen laskurifunktion $s \mapsto \#\{x \in S | x \leq s\}$ avulla — väite todistetaan osoittamalla molempien ylläolevien pistekokoelmien laskurifunktion äärellisulotteiset jakaumat samoiksi.

Kun $(U_j)_{j=1,\ldots,n}$ ovat riippumattomia tasaisesti jakautuneita, kokoelman $\{U_j \,|\, j = 1, \ldots, n\}$ laskurifunktion arvot noudattavat binomijakaumaa

$$\mathsf{P}\big[\#\{j \,|\, U_j \leq s\} = m\big] = \binom{n}{m}\Big(\frac{s}{t}\Big)^m\Big(\frac{t-s}{t}\Big)^{n-m}.$$

Tämän laskurifunktion äärellisulotteiset jakaumat ovat multinomijakaumia, ylläolevan suoraviivaisia yleistyksiä.

Ehdollistettuna tapahtumalle $\{N_t = n\}$, Poisson-prosessin ensimmäisten saapumishetkien pistekokoelman $\{A_k \,|\, k = 1, \ldots, n\}$ laskurifunktion arvo noudattaa seuraavaa jakaumaa:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big[\# \{k \,|\, A_k \leq s\} = m \;\Big|\; N_t = n\Big] \\
= \; &\frac{\mathsf{P}[N_s = m,\; N_t = n]}{\mathsf{P}[N_t = n]} = \frac{\mathsf{P}[N_s = m,\; N_t - N_s = n - m]}{\mathsf{P}[N_t = n]} \\
= \; &\frac{\frac{1}{m!}(\lambda s)^m e^{-\lambda s} \times \frac{1}{(n-m)!}(\lambda(t-s))^{n-m} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{1}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}} \\
= \; &\frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{s^m (t-s)^{n-m}}{t^n} = \binom{n}{m} \Big(\frac{s}{t}\Big)^m \Big(\frac{t-s}{t}\Big)^{n-m}.
\end{aligned}$$

Tämänkin laskurifunktion äärellisulotteiset jakaumat lasketaan suoraviivaisella yleistyksellä, ja tulos on sama multinomijakauma. □

2.1.3. *Poisson-prosessi skaalausrajana*

Esitämme tässä lyhyesti erään diskretisaation Poisson-prosessista, nimittäin Bernoulli-prosessin. Bernoulli prosessia kannattaa erityisesti käyttää intuition saamiseksi Poisson-prosessista. Lisäksi tätä diskretisaatiota voisi käyttää esimerkiksi Poisson-prosessin simuloimiseksi tietokoneella (Luvun 2.3 konstruktio on tosin simulaatiotakin varten parempi). Emme todista formaalisti Poisson-prosessin olevan Bernoulli prosessin skaalausraja, vaikka se ei erityisen vaikeaa olisikaan.

Ajatellaan jaettavaksi aika lyhyisiin osiin — aikaväleihin, joiden pituus $\delta > 0$ on pieni. Merkitään $\tilde{I}_n$ aikavälille $((n-1)\delta, n\delta]$ osuvien saapumisten lukumäärää. Ominaisuuksien (PP:$\perp\!\!\!\perp$) ja (PP:$\sim$) perusteella $(\tilde{I}_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ on jono riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Ominaisuuksien (PP:λ) ja (PP:$\times$) perusteella satunnaismuuttujan $\tilde{I}_n$ jakaumaa voidaan approksimoida kaavoilla $\mathsf{P}[\tilde{I}_n = 1] \approx \delta\lambda$ ja $\mathsf{P}[\tilde{I}_n = 0] \approx 1 - \delta\lambda$, kun aikavälin pituus δ on pieni.

Bernoulli-prosessi on ylläolevan approksimaation määrittelemä diskreettiaikainen satunnaisprosessi: valitsemme jonon $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ riippumattomia satunnaismuuttujia Bernoulli-jakaumasta parametrilla $\lambda\delta$, eli $\mathsf{P}[I_n = 1] = \delta\lambda$ ja $\mathsf{P}[I_n = 0] = 1 - \delta\lambda$. Kun $t = n\delta$, asetamme $N_t^{(\delta)} = \sum_{j=1}^n I_n$. Näin saamme diskreetillä aikajoukolla $\delta\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots\}$ määritellyn satunnaisprosessn $(N_t^{(\delta)})_{t \in \delta\mathbb{Z}_{\geq 0}}$.

Annetulla ajanhetkellä $t = n\delta$ Bernoulli-prosessin arvo on binomijakautunut, $N_t^{(\delta)} \sim \mathrm{Bin}(n, \lambda\delta)$. Muistutamme tässä yhteydessä Esimerkin I.46, binomijakauman Poisson approksimaation — se sanoo nyt, että kiinnitetyllä t kun $\delta \searrow 0$ (jolloin $n = t/\delta \to \infty$), arvon $N_t^{(\delta)}$ jakaumaa voidaan approksimoida (heikon konvergenssin mielessä) Poisson-jakaumalla

$$\mathsf{P}\big[N_t^{(\delta)} = k\big] = \binom{n}{k} (\lambda\delta)^k (1 - \lambda\delta)^{n-k} \approx \frac{(\lambda\delta n)^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Poisson-prosessille tämä approksimaatio osoittautuu eksaktiksi, $N_t \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$, kuten jo Lauseessa III.26 todettiin.

Tarkastellaan vielä ensimmäisen saapumisen ajanhetkeä. Merkitään

$$T_1^{(\delta)} = \min \Big\{ t \in \delta\mathbb{Z}_{\geq 0} \,\Big|\, N_t^{(\delta)} > 0 \Big\},$$

ja tarkastellaan satunnaismuuttujan $T_1^{(\delta)}$ jakaumaa. Koska tämä ajanhetki voidaan kirjoittaa myös muodossa $T_1^{(\delta)} = \delta \times \min \big\{ n \in \mathbb{Z}_{>0} \,\big|\, I_n = 1 \big\}$, huomaamme sen olevan oleellisesti geometrisesti jakautunut (tarkemmin sanottuna, $\frac{1}{\delta}T_1^{(\delta)} - 1 \sim \mathrm{Geom}(\lambda\delta)$). Nimittäin, kun merkitään taas $t = n\delta$, saadaan

$$\mathsf{P}\big[T_1^{(\delta)} = t\big] = \lambda\delta\,(1-\lambda\delta)^{n-1} \approx \lambda\delta\, e^{-\lambda t}.$$

Tämä on jälleen approksimaatio Poisson-prosessista, jolle ensimmäinen saapumishetki T_1 on eksponentiaalisesti jakautunut parametrilla λ, kts. Seuraus III.29.

Poisson-prosessi voidaan ymmärtää myös tasaisten jakaumien skaalausrajana. Idea selviää seuraavasta harjoitustehtävästä.

Tehtävä III.2. Olkoon $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ jono positiivisia lukuja, jolle $\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{n} = \frac{1}{\lambda}$. Kaikilla n valitaan $(U_j^{(n)})_{j=1,\ldots,n}$ riippumattomia satunnaismuuttujia tasaisesta jakaumasta joukolla $[0, L_n]$ ja tarkastellaan pistekokoelmaa $S_n = \big\{U_j^{(n)} \,|\, j = 1,\ldots,n\big\}$.

Kiinnitetyllä n ja annetuilla $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ laske vektorien

$$\Big(\#\Big\{j \,\Big|\, t_{j-1} < U_j^{(n)} \le t_j\Big\}\Big)_{j=1,\ldots,k}$$

jakaumat. Osoita, että rajalla $n \to \infty$ saadaan Poisson-prosessin äärellisulotteiset jakaumat.

2.2. Ohentaminen ja Poisson-pisteprosessit yleisillä avaruuksilla

2.2.1. *Poisson jakauman ja Poisson-prosessin ohentaminen*

Poisson-jakautuneen satunnaismuuttujan ohentamisella tarkoitetaan seuraavaa.

Propositio III.32. *Olkoon S äärellinen joukko, ja $(p_x)_{x\in S}$ todennäköisyysjakauma sillä, ja olkoon $(X_j)_{j\in\mathbb{Z}_{>0}}$ jono riippumattomia satunnaismuuttujia tällä jakaumalla, $\mathsf{P}[X_j = x] = p_x$ kaikilla $x \in S$. Olkoon $P \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ riippumaton jonosta $(X_j)_{j\in\mathbb{Z}_{>0}}$. Asetetaan kaikilla $x \in S$*

$$P^{(x)} = \#\Big\{j \le P \,\Big|\, X_j = x\Big\}.$$

Silloin satunnaismuuttujat $P^{(x)}$, $x \in S$, ovat keskenään riippumattomat ja $P^{(x)} \sim \mathrm{Poisson}(\lambda p_x)$.

Todistus. Lasketaan todennäköisyys

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big[\forall x\in S:\ P^{(x)} = k_x\Big] &= \mathsf{P}\big[P = \sum_y k_y\big] \times \mathsf{P}\Big[\forall x \in S:\ \#\Big\{j \le \sum_y k_y \,\Big|\, X_j = x\Big\} = k_x\Big] \\ &= \frac{\lambda^{\sum_y k_y}}{(\sum_y k_y)!}e^{-\lambda} \times \frac{(\sum_y k_y)!}{\prod_x k_x!}\prod_x p_x^{k_x} = \prod_{x\in S}\frac{(\lambda p_x)^{k_x}}{k_x!}e^{-\lambda p_x}.\end{aligned}$$

Viimeisen lausekkeen tulomuoto näyttää satunnaismuuttujat $P^{(x)}$, $x \in S$, riippumattomiksi. Tulon tekijöistä luetaan satunnaismuuttujan $P^{(x)}$ jakauma $\mathrm{Poisson}(\lambda p_x)$. □

Huomautus III.33. Koska yllä $\sum_{x\in S} P^{(x)} = P$, edellisestä saadaan erityisesti hieman epäsuora tapa nähdä se jo Tehtävässä **??** todistettu seikka, että riippumattomien Poisson jakautuneiden satunnaismuuttujien summa on Poisson jakautunut parametrilla, joka saadaan summattavien satunnaismuuttujien parametrien summana.

Yllä kuvattu ohentaminen on hyödyllistä muun muassa Poisson-prosessin konstruoimiseksi.

Vastaavasti koko Poisson-prosessi voidaan ohentaa. Tämä osoittautuu erittäin hyödylliseksi muun muassa analysoitaessa Poisson-kelloihin perustuvia satunnaisia hyppyprosesseja.

Propositio III.34. *Olkoon S äärellinen joukko, ja $(p_x)_{x \in S}$ todennäköisyysjakauma sillä, ja olkoon $(X_j)_{j \in \mathbb{Z}_{>0}}$ jono riippumattomia satunnaismuuttujia tällä jakaumalla, $\mathsf{P}[X_j = x] = p_x$ kaikilla $x \in S$. Olkoon $N = (N_t)_{t \in [0,\infty)}$ sellainen Poisson-prosessi intensiteetillä λ, joka on riippumaton kokoelmasta $(X_j)_{j \in \mathbb{Z}_{>0}}$. Asetetaan kaikilla $x \in S$ ja $t \geq 0$*

$$N_t^{(x)} = \# \left\{ j \leq N_t \;\middle|\; X_j = x \right\}.$$

Silloin prosessit $(N_t^{(x)})_{t \in [0,\infty)}$, $x \in S$, ovat keskenään riippumattomia Poisson-prosesseja vastaavilla intensiteeteillä λp_x.

Todistus. Äärellisulotteisia jakaumia tarkastelemalla todistus on suoraviivainen variantti Proposition III.32 todistuksessa tehdystä laskusta. $\square$

2.2.2. *Yleiset Poisson-pisteprosessit*

Olkoon $(\mathfrak{X}, \mu, \Sigma)$ mitta-avaruus. Satunnaista kokonaislukuarvoista mittaa N joukolla $\mathfrak{X}$ (jonka mitallisten joukkojen kokoelma on Σ) sanotaan *Poisson-pisteprosessiksi* avaruudella $\mathfrak{X}$ ja intensiteettimitalla μ, jos pätee:

- Kaikilla $B \in \Sigma$ satunnaismuuttujan $N(B)$ jakauma on Poisson$(\mu(B))$.
- Erillisillä joukoilla $B_1, \ldots, B_n \in \Sigma$, satunnaismuuttujat $N(B_1), \ldots, N(B_n)$ ovat riippumattomat.

Huomautus III.35. Ylläolevassa määritelmässä vaaditaan toisaalta, että erillisille joukoille $B_1, B_2 \subset \mathfrak{X}$ satunnaismuuttujat $N(B_1)$, $N(B_2)$ ovat riippumattomat, ja toisaalta, että $N(B_1)$, $N(B_2)$ ja $N(B_1 \cup B_2)$ ovat kaikki Poisson jakautuneita parametreilla $\mu(B_1)$, $\mu(B_2)$ ja $\mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2)$, vastaavasti. Nämä vaatimukset ovat ainakin keskenään konsistentteja, sillä riippumattomien Poisson jakautuneiden satunnaismuuttujien summa on Poisson jakautunut, ja sen parametri saadaan summattavien parametrien summana.

Esimerkki III.36. Tavallista Poisson-prosessia intensiteetillä $\lambda > 0$ vastaava laskurimitta on Poisson-pisteprosessi avaruudella $\mathfrak{X} = [0, \infty)$ ja intensiteettimitalla $\mu = \lambda \times$Lebesguen mitta.

Kun $\mathfrak{X}$ on kokonaismitaltaan äärellinen, Poisson-pisteprosessi voidaan konstruoida seuraavasti.

Lemma III.37. *Oletetaan, että $\mu(\mathfrak{X}) < \infty$. Olkoon $(X_j)_{j \in \mathbb{Z}_{>0}}$ jono riippumattomia tasaisesti jakautuneita satunnaismuuttujia joukolla $\mathfrak{X}$, eli $\mathsf{P}[X_j \in B] = \frac{\mu(B)}{\mu(\mathfrak{X})}$ kaikilla mitallisilla joukoilla $B \subset \mathfrak{X}$. Olkoon $P \sim$ Poisson$(\mu(\mathfrak{X}))$ riippumaton kokoelmasta $(X_j)_{j \in \mathbb{Z}_{>0}}$. Kaikilla $B \subset \mathfrak{X}$ asetetaan $N(B) = \# \left\{ j \leq P \,\middle|\, X_j \in B \right\}$. Silloin N on Poisson-pisteprosessi avaruudella $\mathfrak{X}$ ja intensiteettimitalla μ.*

Todistus. Olkoot $B_1, \ldots, B_n \subset \mathfrak{X}$ erillisiä mitallisia joukkoja, ja oletetaan yleisyyttä rajoittamatta, että $\bigcup_{j=1}^n B_j = \mathfrak{X}$ (tarvittaessa lisätään yksi joukko, joka on muiden yhdisteen komplementti). Tässä määritellyt $N(B_1), \ldots, N(B_n)$ ovat täsmälleen Proposition III.32 ohennetut satunnaismuuttujat — nyt $S = \{1, \ldots, n\}$ ja ohennusparametrit ovat $p_x = \frac{\mu(B_x)}{\mu(\mathfrak{X})}$. Satunnaismuuttujien $N(B_1), \ldots, N(B_n)$ riippumattomuus ja Poisson jakautuneisuus halutuilla parametreilla $\mu(B_1), \ldots, \mu(B_n)$ seuraa. □

Poisson-pisteprosessi voidaan konstruoida myös σ-äärellisissä avaruuksissa.

Lemma III.38. *Oletetaan, että $\mathfrak{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{X}^{(n)}$, missä $\mu(\mathfrak{X}^{(n)}) < \infty$. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että joukot $\mathfrak{X}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, ovat erilliset. Jos kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on annettu Poisson-pisteprosessi $N^{(n)}$ joukolla $\mathfrak{X}^{(n)}$ ja intensiteettimitalla $\mu_{|\mathfrak{X}^{(n)}}$, ja nämä prosessit ovat keskenään riippumattomat, niin kaava*

$$N(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} N^{(n)}(B \cap \mathfrak{X}^{(n)})$$

määrittelee Poisson-pisteprosessin avaruudella $\mathfrak{X}$ ja intensiteettimitalla μ.

Todistus. Sekä Poisson jakautuneisuuden että riippumattomuuden tarkistaminen on suoraviivaista. □

Esimerkki III.39. Lemmoista III.37 ja III.38 saadaan seuraava konstruktio tavalliselle Poisson-prosessille. Jaetaan $[0, \infty)$ äärellismittaisiin erillisiin osiin, esimerkiksi väleihin $[n-1, n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Valitaan riippumattomat Poisson jakautuneet satunnaismuuttujat, jotka kertovat näille väleille osuvien saapumisten lukumäärät. Lopulta sirotellaan nämä saapumiset tasaisesti ja riippumattomasti vastaaville väleille.

Seuraus III.40. *Tavallinen Poisson-prosessi intensiteetillä λ on olemassa.*

Esimerkki III.41 (Eri intensiteettisten Poisson-prosessien koplaukset)**.** Lemmojen III.37 ja III.38 avulla voidaan konstruoida Poisson-pisteprosessi N neljännestasossa $[0, \infty) \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$ käyttäen intensiteettimittana tavallista pinta-alamittaa (eli $\mathbb{R}^2$:n Lebesgue mitan rajoittumaa neljännestasoon). Asetetaan kaikilla $\lambda \geq 0$ ja $t \geq 0$

$$N_t^{(\lambda)} = N\big([0, t] \times [0, \lambda]\big).$$

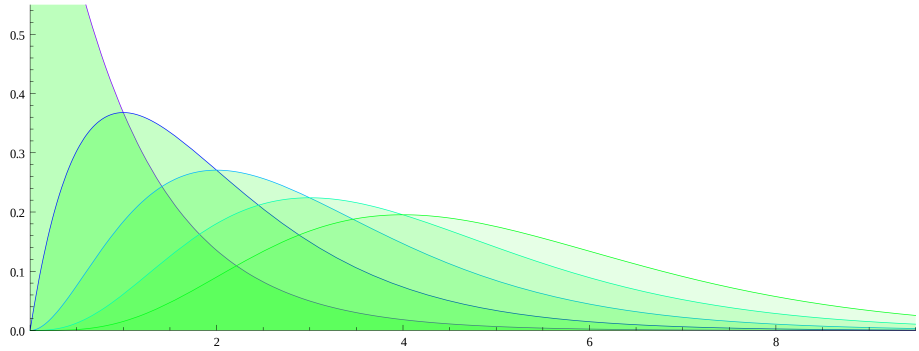
Helposti nähdään, että kiinnitetyllä λ prosessi $(N_t^{(\lambda)})_{t \in [0,\infty)}$ on tavallinen Poisson-prosessi intensiteetillä λ. Kaikki eri intensiteettien Poisson-prosessit on kuitenkin näin "koplattu", eli toteutettu samalla todennäköisyysavaruudella. Tällä koplauksella on se erittäin hyödyllinen ominaisuus, että kun $\lambda < \lambda'$, jokainen prosessin $N^{(\lambda)}$ saapumishetki on myös prosessin $N^{(\lambda')}$ saapumishetki.

2.3. Konstruktio eksponenttijakautuneiden odotusaikojen avulla

Konkreettinen konstruktio Poisson-prosessille saadaan odotusaikojen jonosta $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ lähtien. Muistutamme, että $T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, kts. Seuraus III.29. Odotusajat osoittautuvat riippumattomiksi ja samoin jakautuneiksi, kuten esimerkiksi ominaisuuksien (PP:$\perp\!\!\!\perp$) ja (PP:$\sim$) sekä Seurauksen III.30 valossa lienee luonnollista uskoa.

Otamme tässä lähtökohdaksi jonon $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden jakauma on $T_k \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, määrittelemme ajanhetket

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} T_j,$$



KUVA III.3. Poisson-prosessin saapumisaikojen A_k jakaumien todennäköisyystiheydet pienillä k, katso Propositio III.44(a).

ja konstruoimme prosessin

$$N(t) = \max\left\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; A_n \leq t\right\}. \tag{III.13}$$

Osoitamme Lauseessa III.46, että näin konstruoitu prosessi on Poisson-prosessi intensiteetillä λ. Aloitamme joistakin tarvittavista aputuloksista, jotka ovat myös itsessään hyödyllisiä.

Poisson-prosessin uusiutumisominaisuutta vastaava odotusaikojen ominaisuus on seuraava eksponenttijakauman uusiutumisominaisuus.

Lemma III.42 (Eksponenttijakauman uusiutumisominaisuus)**.** *Olkoon* $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ *eksponenttijakautunut satunnaismuuttuja parametrilla* $\lambda > 0$*, ja olkoon* $s \geq 0$*. Silloin ehdollistettuna tapahtumalle* $\{T > s\}$ *satunnaismuuttujan* T *jakauma saadaan lisäämällä uusi eksponenttijakautunut satunnaismuuttuja parametrilla* λ*, eli*

$$\mathsf{P}\big[T > s + t \;\big|\; T > s\big] = e^{-\lambda t} \qquad \textit{kaikilla } t > 0..$$

Todistus. Lasketaan $\mathsf{P}\big[T > s + t \;\big|\; T > s\big] = \frac{\mathsf{P}[T > s+t]}{\mathsf{P}[T>s]} = \frac{\exp(-\lambda(t+s))}{\exp(-\lambda s)} = e^{-\lambda t}$. □

Tehtävä III.3. Osoita, että jos positiivisella satunnaismuuttujalla T on uusiutumisominaisuus $\mathsf{P}\big[T > s + t \,\big|\, T > s\big] = \mathsf{P}[T > t]$ kaikilla $s, t \geq 0$, niin $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ jollakin $\lambda > 0$.

Tehtävä III.4. Osoita, että jos satunnaismuuttujalla T, jonka arvot ovat epänegatiivisia kokonaislukuja, on uusiutumisominaisuus $\mathsf{P}\big[T = s + k \,\big|\, T \geq s\big] = \mathsf{P}[T = k]$ kaikilla $s, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, niin $T \sim \mathrm{Geom}(q)$ jollakin $q \in (0, 1)$.

Määritelmä III.43. Positiivinen satunnaismuuttuja X on gamma-jakautunut parametreilla α ja λ, merkitään $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda)$, jos

$$\mathsf{P}[X \in U] = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{U \cap [0,\infty)} x^{\alpha - 1} e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}x.$$

Propositio III.44. *Olkoon* $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ *jono riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia jakaumalla* $T_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$*. Silloin pätee*

(a) $T_1 + \cdots + T_k \sim \mathrm{Gamma}(k, \lambda)$.
(b) $\mathsf{P}\big[\sum_{j=1}^{n} T_j \leq t < \sum_{j=1}^{n+1} T_j\big] = \frac{1}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}$.

(c) $\mathsf{P}\big[\sum_{j=1}^{n} T_j \leq t,\ \sum_{j=1}^{n+1} T_j \geq u\big] = \frac{1}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda u}$.

Todistus. Harjoitustehtävä (suoria laskuja). □

Huomautus III.45. Kohta (a) antaa Poisson-prosessin k:nnen saapumisajan $A_k = \sum_{j=1}^{k} T_j$ jakauman, jota on havainnollistettu Kuvassa III.3.

Kohdan (b) mukaan odotusaikakonstruktiosta (III.13) tosiaan saadaan prosessille oikeat pisteittäiset jakaumat $N_t \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$.

Kohdista (b) ja (c) yhdessä seuraa

$$\mathsf{P}\big[A_{n+1} \geq u \mid N_t = n\big] = \frac{\mathsf{P}[A_{n+1} \geq u,\ A_n \leq t]}{\mathsf{P}[N_t = n]} = \frac{e^{-\lambda u}(\lambda t)^n/n!}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!} = e^{-\lambda(u-t)},$$

eli ehdollistettuna satunnaismuuttujan N_t arvolle, seuraava saapumishetki ajan t jälkeen noudattaa edelleen eksponentiaalista odotusaikaa ajanhetkestä t lähtien.

Lause III.46 (Poisson-prosessin konstruktio odotusaikojen avulla)**.** *Olkoon $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ jono riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia jakaumalla $T_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Asetetaan*

$$N_t = \max\left\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; T_1 + \cdots + T_n \leq t\right\}. \tag{III.14}$$

Silloin $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ on Poisson-prosessi intensiteetillä λ.

Todistus. Jätämme harjoitustehtäväksi todistaa Poisson-prosessin määrittelevät ominaisuudet (PP:$\perp\!\!\!\perp$), (PP:$\sim$), (PP:λ) ja (PP:$\times$) kaavan (III.13) määrittelemälle prosessille Proposition III.44 avulla. □

2.3.1. *Suurten lukujen laki*

Asymptoottisesti Poisson-prosessi on luotettava kello: nimittäin pätee seuraava suurten lukujen laki

$$\frac{N(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \lambda.$$

Muotoilemme tästä väitteestä alla kaksi versiota: heikon suurten lukujen lain (stokastinen suppeneminen) ja vahvan suurten lukujen lain (melkein varma suppeneminen) joista ensimmäiseen sisältyy myös arvio konvergenssinopeudesta.

Lemma III.47. *Stokastisen konvergenssin mielessä $\frac{N(t)}{t} \to \lambda$.*

Todistus. Chebyshevin epäyhtälön perusteella

$$\mathsf{P}\left[\left|\frac{N(t)}{t} - \lambda\right| > \varepsilon\right] \leq \frac{\mathsf{Var}[N(t)/t]}{\varepsilon^2} = \frac{\lambda}{\varepsilon^2 t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Propositio III.48. *Melkein varmasti $\frac{N(t)}{t} \to \lambda$.*

Todistus. Käytetään Poisson-prosessin konstruktiota odotusaikojen jonon $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ avulla. Olkoot siis satunnaismuuttujat T_n riippumatomia ja $T_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, ja määritellään N_t kaavalla (III.13).

Asetetaan $A_n = \sum_{j=1}^{n} T_j$. Huomataan, että

$$A_{N_t} \leq t \leq A_{N_t+1}.$$

Jakamalla puolittain satunnaismuuttujalla N_t saadaan

$$\frac{A_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{A_{N_t+1}}{N_t}.$$

Lauseen I.60 perusteella pätee melkein varmasti $\frac{1}{n}A_n \to \mathsf{E}[T_j] = \frac{1}{\lambda}$ kun $n \to \infty$, ja samoin $\frac{A_{n+1}}{n} \to \frac{1}{\lambda}$. Koska $N_t \to \infty$ kun $t \to \infty$ (melkein varmasti), ylläolevasta epäyhtälöstä nähdään, että $\frac{t}{N_t} \to \frac{1}{\lambda}$, melkein varmasti. Päättelemme, että $\frac{N_t}{t} \to \lambda$, melkein varmasti. $\square$