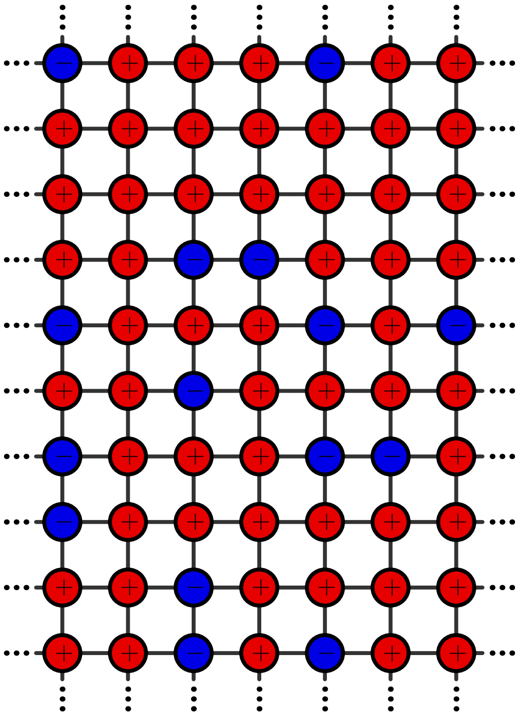
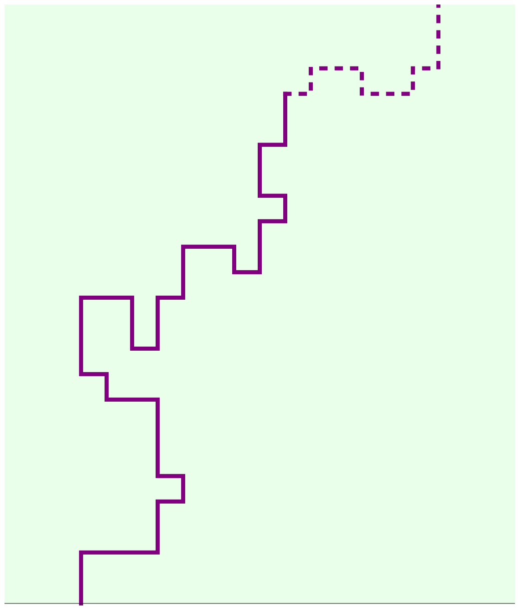


(a) Ising malli äärettömällä hilalla $\mathbb{Z}^2$



(b) Äärettömän pitkä itseään välttävä satunnaiskävelyt puolitasossa

KUVA II.17. Esimerkeiksi termodynaamisista rajoista otamme Ising mallin hilalla $\mathbb{Z}^d$ ja itseään välttävän satunnaiskävelyn puoliavaruudessa $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^{d-1} \subset \mathbb{Z}^d$.

5. Probabilistisista termodynaamisista rajoista

Formalisoimme nyt probabilistista termodynaamisen rajan käsitettä. Satunnaiset oliomme saavat arvoja täydellisillä separoituvilla metrisillä avaruuksilla, ja tarkastelemme niiden jakaumien heikkoa suppenemista (yleensä fysikaalisen systeemin osasten lukumäärän N mennessä äärettömään). Pääesimerkkimme ovat Kuvassa II.17 havainnollistetut Ising malli ja itseään välttävä puoliavaruuskävely, joiden termodynaamisten rajojen olemassaolon todistamme Luvussa 5.3. Esimerkkinä samasta ideasta voidaan ymmärtää myös Osan III päätulos, Donskerin lause, joka konstruoi Brownin liikkeen satunnaiskävelyjen skaalausrajana.

5.1. Metriset avaruudet, täydellisyys, separoituvuus

Muistutetaan, että metrinen avaruus on joukko $\mathfrak{X}$ varustettuna metriikalla, eli funktiolla $\varrho \colon \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to [0, \infty)$ siten, että

$$\varrho(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \qquad (\varrho\text{-Ero})$$
$$\varrho(x,y) = \varrho(y,x) \qquad \forall x,y \in \mathfrak{X} \qquad (\varrho\text{-Sym})$$
$$\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y) \qquad \forall x,y,z \in \mathfrak{X}. \qquad (\varrho\text{-}\Delta)$$

Lukijan oletetaan tuntevan seuraavat metrisen topologian peruskäsitteet:

Määritelmä II.53. Kun $x \in \mathfrak{X}$ ja $r > 0$, (avoin) x-keskinen r-säteinen *kuula* on joukko $B_r(x) = \{y \in \mathfrak{X} \,|\, \varrho(x, y) < r\}$. Joukko $A \subset \mathfrak{X}$ on *avoin*, jos sen jokaisen pisteen jokin kuula sisältyy joukkoon A, ja *suljettu*, jos sen komplementti $\mathfrak{X} \setminus A$ on avoin. Joukon $A \subset \mathfrak{X}$ *sulkeuma* $\overline{A}$ on kaikkien sen sisältävien suljettujen joukkojen leikkaus, ja sen *sisälmys* A° on kaikkien siihen sisältyvien avointen joukkojen yhdiste. Joukko A on *tiheä*, jos sen sulkeuma on koko avaruus, $\overline{A} = \mathfrak{X}$. Jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pisteitä $x_n \in \mathfrak{X}$ on *Cauchy-jono*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$ kun $n, m \geq N$.

Määritelmä II.54. Metrinen avaruus $(\mathfrak{X}, \varrho)$ on

- *täydellinen*, jos sen kaikki Cauchy-jonot suppenevat
- *separoituva*, jos on olemassa numeroituva tiheä osajoukko $A \subset \mathfrak{X}$.

Huomautus II.55. Topologista avaruutta, joka on separoituva, ja jonka topologia saadaan jostakin metriikasta, jonka suhteen $\mathfrak{X}$ on täydellinen, sanotaan usein *puolalaiseksi avaruudeksi*. Olisi periaatteessa tarkoituksenmukaista tehdä kaikki tämän luvun tarkastelut juuri puolalaisilla avaruuksilla, koska mikään olennainen ei riipu metriikasta itsestään, vaan ainoastaan sen määräämästä topologiasta. Konkretian vuoksi oletamme kuitenkin aina annetun metriikan.

Esimerkki II.56. Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ varustettuna metriikalla $\varrho(x, y) = |x - y|$ on täydellinen separoituva metrinen avaruus: kaikki Cauchy-jonot suppenevat ja vaikkapa rationaaliluvut $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ muodostavat numeroituvan tiheän joukon. Olemme jo tarkastelleet heikkoa suppenemista $\mathbb{R}$:llä Luvussa I.3. Esimerkkisovelluksista muistutamme mieleen seuraavat:

- keskeinen raja-arvolause (Luku I.4)
- ääriarvostatistiikat (Esimerkki I.48 ja Tehtävä I.7)
- Curie-Weiss mallin empiiriset magnetisaatiot (Lauseet II.23 ja II.24)

Samoin $\mathbb{R}^d$ varustettuna Euklidisen normin määräämällä metriikalla $\varrho(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$ (itseasiassa minkä tahansa normin määräämällä metriikalla) on täydellinen separoituva metrinen avaruus. Ilmeisiä sovelluskohteita heikolle suppenemiselle $\mathbb{R}^d$:llä ovat suoraan vektoriarvoisten satunnaismuuttujien lisäksi useiden reaalisten satunnaismuuttujien yhteisjakaumat.

Esimerkki II.57. Osoitamme myöhemmin, että jatkuvien, välillä $[a, b] \subset \mathbb{R}$ määriteltyjen reaaliarvoisten funktioiden avaruus $C([a, b])$ varustettuna metriikalla

$$\varrho(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

on täydellinen separoituva metrinen avaruus. Erittäin tärkeä sovelluskohde heikolle suppenemiselle avaruudella $C([0, T])$ on Luvussa III.1 tarkasteltava Donskerin lause, jonka mukaan yksinkertaisen satunnaiskävelyn skaalausraja on Brownin liike.

Seuraava esimerkki on statistisessa fysiikassa niin tärkeä, että se ansaitsee jo tässä vaiheessa koko Luvun 5.1.1.

5.1.1. *Diskreettien joukkojen numeroituvat tulot*

Olkoon S joukko (yleensä äärellinen tai numeroituvasti ääretön, tässä aina varustettuna diskreetillä topologialla) ja I numeroituva indeksijoukko. Määritellään

$$S^I = \left\{ (\omega_i)_{i \in I} \;\middle|\; \omega_i \in S \;\forall i \right\} = \{\text{funktiot } \omega \colon I \to S\}. \tag{II.30}$$

Esimerkki II.58. Tapaus $S = \{-1, +1\}$ ja $I = \mathbb{Z}^d$ on relevantti d-ulotteisen Ising mallin termodynaamiselle rajalle.

Esimerkki II.59. Tätä muotoa oleva avaruus soveltuu myös tarkastelemiimme lähinaapurikävelyihin hilalla $\mathbb{Z}^d$: kävelyt $\mathbf{X} = (\mathbf{X}(t))_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ovat luontevasti avaruuden $(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ alkioita, jolloin $S = \mathbb{Z}^d$ ja $I = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ovat molemmat numeroituvasti äärettömiä. Vaihtoehtoisesti kävely voitaisiin samaistaa askeltensa $\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t-1)$ jonon kanssa, jolloin S olisi mahdollisten askelten äärellinen joukko ja $I = \mathbb{N}$.

Ylläoleviin kahteen esimerkkiin palaamme Luvuissa 5.3.1 ja 5.3.2, vastaavasti.

Kun $s \in S$ ja $i \in I$, asetetaan

$$C_i(s) = \left\{ \omega \in S^I \;\middle|\; \omega_i = s \right\}.$$

Yleisemmin, muotoa

$$C_{i_1}(s_1) \cap C_{i_2}(s_2) \cap \cdots \cap C_{i_n}(s_n) \tag{II.31}$$

olevaa joukkoa sanotaan *sylinterijoukoksi* (tai *sylinteritapahtumaksi*, kun halutaan korostaa todennäköisyyksiä).

Oletetaan tästä eteenpäin notaation keventämiseksi saman tien valituksi indeksijoukon alkioiden numerointi, jolloin $I = \mathbb{N}$. Asetetaan

$$\varrho(\omega, \omega') = \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ \omega_i \neq \omega'_i}} 2^{-i} \tag{II.32}$$

Tehtävä II.15. Osoita, että kaava (II.32) määrittelee metriikan joukolla S^I, eli, että (ϱ-Ero), (ϱ-Sym) ja (ϱ-Δ) ovat voimassa.

Tehtävä II.16. Osoita, jos $\omega^{(n)} = (\omega_i^{(n)})_{i \in I}$, niin jono $(\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee jos ja vain jos kaikilla $i \in I$ on olemassa $s_i \in S$ ja $n_i \in \mathbb{N}$ siten, että $\omega_i^{(n)} = s_i$ kun $n \geq n_i$.

Lemma II.60. *Seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:*

(i) *Jos S on äärellinen tai numeroituva, niin sylinterijoukkoja on numeroituva määrä.*

(ii) *Jos $s_1, s_2, \ldots s_n \in S$ ja $r < 2^{-n}$, niin perussylinterijoukko*

$$C_1(s_1) \cap \cdots \cap C_n(s_n),$$

sisältää kaikkien alkioidensa r-ympäristöt.

(iii) *Kaikki sylinterijoukot ovat yhdisteitä kohdan (ii) perussylinterijoukoista. Erityisesti sylinterijoukot ovat avoimia joukkoja.*

(iv) *Sylinterijoukon komplementti on yhdiste sylinterijoukoista, ja siten erityisesti avoin. Sylinterijoukot ovat siis sekä avoimia että suljettuja joukkoja.*

(v) *Jokainen avoin joukko on sylinterijoukkojen yhdiste.*

Todistus. Sylinterit vastaavat valintoja $n \in \mathbb{N}$ ja sitten $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ ja $s_1, \ldots, s_n \in S$ — tällaisia valintoja on numeroituvan monta, koska numeroituvien joukkojen äärelliset karteesiset tulot ja numeroituvat yhdisteet ovat numeroituvia. Tämä osoittaa kohdan (i).

Jos $\omega' = (\omega'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ on alkion $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ r-ympäristössä, missä $r < 2^{-n}$, niin $\omega_i = \omega'_i$ kaikilla $i \leq n$. Kohta (ii) on tämän perusteella selvä.

Kohta (iii) on selvä.

Kohtaa (iv) varten riittää huomata, että

$$S^I \setminus \big(C_{i_1}(s_1) \cap \cdots \cap C_{i_n}(s_n)\big) = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{s \in S \setminus \{s_k\}} C_{i_k}(s).$$

Kun $r > 2^{-n+1}$, huomataan, että alkion $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ r-ympäristö sisältää sylinterin $C_1(\omega_1) \cap \cdots \cap C_n(\omega_n)$. Koska avoin joukko on alkioidensa joidenkin ympäristöjen yhdiste, on se myös joidenkin sylinterien yhdiste. Tämä todistaa kohdan (v). □

Tehtävä II.17. Osoita, että S^I varustettuna kaavan (II.32) määrittelemällä metriikalla on täydellinen ja separoituva.

5.2. Heikko suppeneminen

Olkoon $(\mathfrak{X}, \varrho)$ metrinen avaruus. Tarkastellaksemme todennäköisyysmittoja avaruudella $\mathfrak{X}$, meidän on varustettava se σ-algebralla. Ilman eri mainintaa ajattelemme jatkossa(kin) todennäköisyysmitat määritellyiksi seuraavalla Borel-joukkojen σ-algebralla.

Määritelmä II.61. Borel σ-algebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \varrho)$ metrisellä avaruudella $(\mathfrak{X}, \varrho)$ on pienin sigma-algebra, joka sisältää kaikki avoimet joukot $U \subset \mathfrak{X}$.

Huomautus II.62. Pienin σ-algebra, joka sisältää jonkin halutun kokoelman $\mathcal{A}$ avaruuden $\mathfrak{X}$ osajoukkoja, eli kokoelman $\mathcal{A}$ generoima σ-algebra $\sigma(\mathcal{A})$, on olemassa: se konstruoidaan kaikkien sellaisten σ-algebrojen leikkauksena, jotka sisältävät tämän kokoelman

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap \big\{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \ \sigma\text{-algebra } \mathfrak{X}\text{:lla}, \ \mathcal{F} \supset \mathcal{A} \big\}.$$

Leikkaus on mielekäs (hyvin määritelty), koska ainakin kaikkien osajoukkojen $E \subset \mathfrak{X}$ kokoelma on vaaditunlainen σ-algebra. On myös suoraviivaista, että leikkaus on tosiaan σ-algebra.

Huomautus II.63. Sigma-algebran ominaisuuksien perusteella $\mathcal{B}$ sisältää kaikki suljetut joukot $A \subset \mathfrak{X}$ (koska ne ovat avoimien joukkojen komplementteja), kaikki numeroituvat leikkaukset avoimista joukoista, numeroituvat yhdisteet suljetuista joukoista jne.

Esimerkki II.64. Olkoon $\mathfrak{X} = S^I$, missä S on äärellinen tai numeroituva ja I on numeroituvia. Kaikki avoimet joukot kuuluvat sylinterijoukkojen generoimaan σ-algebraan Lemman II.60 kohtien (i) ja (v) perusteella, ja toisaalta sylinterijoukot ovat avoimia kohdan (iii) perusteella. Siis sylinterijoukkojen generoima σ-algebra on täsmälleen Borel-sigma-algebra.

Metrisissä avaruuksissa joukkoja voidaan (mitan mielessä) approksimoida tuttuun tapaan alhaalta suljetuilla ja ylhäältä avoimilla joukoilla.

Propositio II.65. *Jokainen (Borel-)todennäköisyysmitta ν metrisellä avaruudella $(\mathfrak{X}, \varrho)$ on säännöllinen: kaikilla $E \in \mathcal{B}$ ja $\varepsilon > 0$ on olemassa suljettu joukko F ja avoin joukko G siten, että $F \subset E \subset G$ ja $\nu[G \setminus F] < \varepsilon$.*

Todistus. Jos E on suljettu, niin avoimet joukot $G_\delta = \{x \in \mathfrak{X} \mid \varrho(x, E) < \delta\}$ approksimoivat joukkoa E ylhäältä: $G_\delta \downarrow E$ kun $\delta \searrow 0$. Tällöin $\lim_{\delta \searrow 0} \nu[G_\delta] = \nu[E]$, joten voidaan valita $F = E$ ja $G = G_\delta$ tarpeeksi pienellä $\delta > 0$. Kaikilla suljetuilla joukoilla on siis haluttu ominaisuus. Helpolla argumentilla nähdään, että niiden joukkojen kokoelma, jolla tämä ominaisuus on, on σ-algebra, ja silloin sen täytyy olla koko $\mathcal{B}$. □

Seuraavaa lemma on helppo, mutta tärkeä — tapauksessa $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ sitä käytettiin olennaisesti mm. Luvussa I.3.

Lemma II.66. *Jos $F \subset \mathfrak{X}$ on suljettu, ja $\varepsilon > 0$, niin on olemassa jatkuva funktio $f : \mathfrak{X} \to [0, 1]$ siten, että $f(x) = 1$ kaikilla $x \in F$ ja $f(x) = 0$ jos $\varrho(x, F) \geq \varepsilon$.*

Todistus. Kun $F \neq \emptyset$, asetetaan $\varrho(x, F) = \inf_{y \in F}(\varrho(x, y))$ ja vaikkapa $f(x) = \max\{1 - \frac{\varrho(x,F)}{\varepsilon}, 0\}$. □

Seuraavassa harjoituksessa annetaan joitakin hyödyllisiä ehtoja sille, milloin mitasta tiedetään riittävästi, että se määräytyy täysin.

Tehtävä II.18. Olkoot ν_1, ν_2 kaksi todennäköisyysmittaa avaruudella $\mathfrak{X}$. Mikä tahansa allaolevista on riittävä ehto sille, että $\nu_1 = \nu_2$:

(i) kaikilla suljetuilla joukoilla $F \subset \mathfrak{X}$ pätee $\nu_1[F] = \nu_2[F]$
(ii) kaikilla jatkuvilla rajoitetuilla funktioilla $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ pätee $\int_{\mathfrak{X}} f \,\mathrm{d}\nu_1 = \int_{\mathfrak{X}} f \,\mathrm{d}\nu_2$.

Yleisessä tapauksessa heikko konvergenssi määritellään samoin kuin Luvussa I.3. Idea on myös sama — satunnaisesta systeemistä mitattaviksi suureiksi idealisoidaan jatkuvien rajoitettujen funktioiden odotusarvot, ja heikko suppeneminen tarkoittaa kaikkien mitattavien suureiden suppenemista.

Määritelmä II.67. Jono $(\nu)_{n \in \mathbb{N}}$ todennäköisyysmittoja metrisellä avaruudella $(\mathfrak{X}, \varrho)$ suppenee heikosti kohti todennäköisyysmittaa ν, jos kaikilla jatkuvilla rajoitetuilla funktioilla $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ pätee

$$\int_{\mathfrak{X}} f \,\mathrm{d}\nu_n \longrightarrow \int_{\mathfrak{X}} f \,\mathrm{d}\nu.$$

Kaikki Lauseen I.41 karakterisaatiot heikolle konvergenssille, jotka ovat vielä yleisessäkin tapauksessa mielekkäitä, ovat edelleen yhtäpitäviä.

Lause II.68. *Olkoot ν_n, $n \in \mathbb{N}$, ja ν tn-mittoja $\mathfrak{X}$:lla. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) *Todennäköisyysmittajono suppenee heikosti $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{w}} \nu$.*
(iv) *Kaikilla avoimilla $U \subset \mathbb{R}$ pätee $\nu(U) \leq \liminf_{n\to\infty} \nu_n(U)$.*
(v) *Kaikilla suljetuilla $F \subset \mathbb{R}$ pätee $\nu(F) \geq \limsup_{n\to\infty} \nu_n(F)$.*
(vi) *Kaikilla Borel joukoilla $B \subset \mathbb{R}$, joille $\nu[\partial B] = 0$, pätee $\nu_n(B) \to \nu(B)$.*

Todistus. Todistus on oleellisesti sama kuin reaalisessa tapauksessa, Lauseessa I.41. □

Reaalisessa tapauksessa käytännöllisimmät keinot tarkistaa heikko konvergenssi olivat kertymäfunktioiden tai karakterististen funktioiden pisteittäisen suppenemisen avulla, ts. Lauseen I.41 ehdoilla (ii) tai (iii). Yleisillä metrisillä avaruuksilla kertymäfunktioita ja karakteristisia funktioita ei valitettavasti ole käytettävissä. Yksi käyttökelpoisimmista kriteereistä on sen sijaan seuraava.

Propositio II.69. *Olkoon $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ osakokoelma, joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

- *$\mathcal{E}$ on äärellisten leikkausten suhteen suljettu kokoelma: jos $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, niin myös $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}$.*
- *jokainen avoin joukko $G \subset \mathfrak{X}$ on numeroituva yhdiste kokoelman $\mathcal{E}$ joukkoja: $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$, missä $E_i \in \mathcal{E}$, $i \in \mathbb{N}$.*

Silloin jos $\nu_n[E] \to \nu[E]$ kaikilla $E \in \mathcal{E}$, niin $\nu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \nu$.

Todistus. Jos $E_1, E_2, \ldots, E_m \in \mathcal{E}$, niin oletuksen nojalla myös näiden leikkaukset ovat kokoelmassa. Silloin inkluusio-ekskluusiokaavasta (vertaa Esimerkkiin I.8) saadaan

$$\nu_n[\bigcup_{i=1}^m E_i] = \sum_{\substack{J \subset [\![1,m]\!] \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{\#J-1} \nu_n[\bigcap_{j \in J} E_j] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{\substack{J \subset [\![1,m]\!] \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{\#J-1} \nu[\bigcap_{j \in J} E_j] = \nu[\bigcup_{i=1}^m E_i].$$

Jos $G \subset \mathfrak{X}$ on avoin, niin oletuksen nojalla $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ joillakin $E_i \in \mathcal{E}$, $i \in \mathbb{N}$. Edellisen laskun perusteella pätee

$$\nu[\bigcup_{i=1}^m E_i] = \lim_{n\to\infty} \nu_n[\bigcup_{i=1}^m E_i] \leq \liminf_{n\to\infty} \nu_n[G].$$

Koska $\bigcup_{i=1}^m E_i \uparrow G$ kun $m \to \infty$, rajalla $m \to \infty$ saamme $\nu[G] \leq \liminf \nu_n[G]$, joten Lauseen II.68 ehto (iv) on voimassa, ja siis $\nu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \nu$. □

5.2.1. *Heikko suppeneminen sylinterien avulla*

Seuraus II.70. *Olkoon $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono todennäköisyysmittoja Luvun 5.1.1 avaruudella S^I, missä S on äärellinen tai numeroituva ja I on numeroituva. Silloin $\nu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \nu$ jos ja vain jos $\nu_n[C] \to \nu_n[C]$ kaikilla sylinterijoukoilla C, eli muotoa* (II.31) *olevilla joukoilla.*

Todistus. Ensinnäkin, sylinterijoukon reuna on tyhjä, koska sylinterijoukko on sekä avoin että suljettu Lemman II.60 kohtien (iii) ja (iv) perusteella. Siksi heikko konvergenssi takaa sylinteritapahtumien todennäköisyyksien konvergenssin Lauseen II.68 kohdan (vi) perusteella.

Toisaalta sylinterijoukkojen äärelliset leikkaukset ovat sylinterijoukkoja, ja avoimet joukot ovat numeroituvia yhdisteitä sylinterijoukoista kunhan S on korkeintaan numeroituva, Lemman II.60 kohtien (i) ja (v) perusteella. Propositiosta II.69 seuraa silloin, että sylinteritapahtumien todennäköisyyksien konvergenssi takaa heikon konvergenssin. □

5.3. Ensimmäisiä sovelluksia termodynaamisiin rajoihin

5.3.1. *Ising mallin termodynaaminen raja plus-reunaehdoilla*

Käsittelemme seuraavaksi Ising mallin termodynaamista rajaa. Käytämme tähän allaolevaa korrelaatioepäyhtälöä (FKG epäyhtälö). Esitämme myöhemmin todistuksen yleisellä ja elegantilla menetelmällä, mutta lukija voi halutessaan todistaa tämän myös suoremmin.

Lause II.71 (FKG epäyhtälö Ising mallille)**.** *Olkoon $G = (V, E)$ äärellinen graafi, $\Omega_G = \{-1, +1\}^V$, ja P Boltzmann jakauma parametrillä $\beta > 0$ ja Hamiltonin funktiolla $H(\underline{\sigma}) = -\sum_{<x,y>\in E} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x\in V} B_x \sigma_v$. Sanomme, että funktio $f \colon \Omega_G \to \mathbb{R}$ on kasvava, jos $f(\underline{\sigma}) \geq f(\underline{\sigma}')$ kaikilla sellaisilla $\underline{\sigma}, \underline{\sigma}' \in \Omega_G$, joille pätee $\sigma_x \geq \sigma_x$ $\forall x \in V$. Jos f, g ovat kasvavia funktioita $\Omega_G \to \mathbb{R}$, niin pätee* *seuraava FKG epäyhtälö*

$$\mathsf{E}[fg] \geq \mathsf{E}[f]\,\mathsf{E}[g]. \tag{II.33}$$

Seurauksena saadaan, että spinien ehdollistaminen positiivisiksi kasvattaa todennäköisyyttä, että muutkin spinit ovat positiivisia. Tämä ei tietenkään ole yllättävää ferromagneetissa.

Seuraus II.72. *Olkoon G, Ω_G ja P kuten Lauseessa II.71. Jos $A, B \subset V$, niin pätee*

$$\mathsf{P}\left[\underline{\sigma}_{|A} \equiv +1 \,\middle|\, \underline{\sigma}_{|B} \equiv +1\right] \geq \mathsf{P}[\underline{\sigma}_{|A} \equiv +1].$$

Todistus. Määritellään f ja g tapahtumien $\{\sigma|_A \equiv +1\}$ ja $\{\sigma|_B \equiv +1\}$ indikaattoreiksi, vastaavasti. Silloin f ja g ovat kasvavia ja

$$\mathsf{E}[f] = \mathsf{P}[\underline{\sigma}_{|A} \equiv +1]$$

$$\frac{\mathsf{E}[fg]}{\mathsf{E}[g]} = \frac{\mathsf{P}[\underline{\sigma}_{|A} \equiv +1] \text{ ja } \underline{\sigma}_{|B} \equiv +1]}{\mathsf{P}[\underline{\sigma}_{|B} \equiv +1]} = \mathsf{P}\left[\underline{\sigma}_{|A} \equiv +1 \,\middle|\, \underline{\sigma}_{|B} \equiv +1\right].$$

Väite seuraa nyt Lauseesta II.71. □

Tarkastelemme sitten Ising-mallia d-ulotteisella hilalla $\mathbb{Z}^d$. Parametrit $\beta > 0$ (käänteinen lämpötila) ja $B \in \mathbb{R}$ (ulkoinen magneettikenttä) pidetään kiinnitettyinä, ja notaation keventämiseksi emme pidä niistä eksplisiittisesti kirjaa. Kun $R \in \mathbb{N}$, määritellään

$$\Lambda_R = [\![-R, R]\!]^d \subset \mathbb{Z}^d,$$

ja merkitään ν_R^+ Ising-mallin Boltzmann jakaumaa $+$-reunaehdoilla laatikossa Λ_R (parametreilla β, B).

Plus-reunaehtojen tapauksessa on luontevaa jatkaa spin-konfiguraatiot $\underline{\sigma} \in \{-1,+1\}^{\Lambda_R}$ laatikon Λ_R komplementtiin vakiona $+1$, jolloin jokainen ν_R^+ saadaan tulkittua todennäköisyysmittana avaruudella $\Omega = \{-1,+1\}^{\mathbb{Z}^d}$, joka on Luvussa 5.1.1 tarkasteltua muotoa.

Huomaamme vielä seuraavan yleisen Gibbsin mittojen ominaisuuden Ising mallin tapauksessa.

Propositio II.73. *Kun $R < R'$, Boltzmann jakauma $\nu_{R'}^+$ ehdollistettuna tapahtumalle $\{\sigma_x = +1\ \forall x \in \Lambda_{R'} \setminus \Lambda_R\}$ on Boltzmann jakauma ν_R^+, eli*

$$\nu_{R'}^+\left[\ \cdot\ \middle|\ \{\sigma_x = +1\ \forall x \in \Lambda_{R'} \setminus \Lambda_R\}\right] = \nu_R^+[\ \cdot\ ].$$

Todistus. Tulkitaan $\{-1,+1\}^{\Lambda_R} \subset \{-1,+1\}^{\Lambda_{R'}} \subset \{-1,+1\}^{\mathbb{Z}^d}$ jatkamalla spin-konfiguraatiot laatikoiden ulkopuolelle vakiona $+1$. Merkitään Ising mallin Hamiltonin funktioita laatikoissa Λ_R ja $\Lambda_{R'}$ plus-reunaehdoilla H_R^+ ja $H_{R'}^+$, siis esimerkiksi

$$H_{R'}^+(\underline{\sigma}) = -\sum_{\substack{<x,y> \\ <x,y>\cap\Lambda_{R'}\neq\emptyset}} \sigma_x\sigma_y - B\sum_{x\in\Lambda_{R'}} \sigma_x.$$

Kaavoista Hamiltonin funktioille nähdään, että kaikilla $\underline{\sigma} \in \{-1,+1\}^{\Lambda_R}$ pätee

$$H_{R'}^+(\underline{\sigma}) = H_R^+(\underline{\sigma}) - c,$$

missä c on vakio — nimittäin B kertaa laatikoiden kokojen ero $\#(\Lambda_{R'} \setminus \Lambda_R)$ plus lukumäärä viivoista $< x, y >$, jotka leikkaavat suurempaa laatikkoa $\Lambda_{R'}$ mutta eivät pienempää Λ_R.

Spinkonfiguraation $\underline{\sigma} \in \{-1,+1\}^{\Lambda_R}$ todennäköisyys pienemmän laatikon Boltzmann jakaumassa on

$$\nu_R^+[\{\underline{\sigma}\}] = \frac{1}{Z_R^+} e^{-\beta H_R^+(\underline{\sigma})}$$

ja todennäköisyys suuremman laatikon ehdollisessa Boltzmann jakaumassa taas

$$\begin{aligned} \nu_{R'}^+ \Big[\{\underline{\sigma}\} \;\Big|\; \underline{\sigma}_{|\Lambda_{R'} \setminus \Lambda_R} \equiv +1 \Big] &= \frac{e^{-\beta H_{R'}^+(\underline{\sigma})} / Z_{R'}}{\nu_{R'}^+[\underline{\sigma}_{|\Lambda_{R'} \setminus \Lambda_R} \equiv +1]} \\ &= \frac{e^{c\beta}}{Z_{R'} \times \nu_{R'}^+[\underline{\sigma}_{|\Lambda_{R'} \setminus \Lambda_R} \equiv +1]} \times e^{-\beta H_R^+(\underline{\sigma})}. \end{aligned}$$

Näemme, että molemmissa tapauksissa todennäköisyys on verrannollinen Boltzmannin tekijään $\exp(-\beta H_R^+(\underline{\sigma}))$. Verrannollisuuskerrointenkin täytyy olla samat, koska molemmissa tapauksissa kokonaistodennäköisyys on 1. Nämä kaksi jakaumaa ovat siis samat. □

Seuraus II.74. *Kun $A \subset \mathbb{Z}^d$ on kiinnitetty äärellinen joukko, niin jono*

$$R \mapsto \nu_R^+[\{\sigma_x = +1 \;\forall x \in A\}]$$

on laskeva. Erityisesti, raja-arvo

$$\lim_{R\to\infty} \nu_R^+[\{\sigma_x = +1 \;\forall x \in A\}]$$

on olemassa.

Nyt olemme valmiit osoittamaan seuraavan Ising-mallin termodynaamista rajaa koskevan tuloksen.

Lause II.75. *Ising-mallin Boltzmann jakaumat ν_R^+ plus-reunaehdoilla laatikoissa Λ_R suppenevat heikosti, kun $R \to \infty$, kohti jotakin todennäköisyysmittaa ν^+ joukolla $\Omega = \{-1,+1\}^{\mathbb{Z}^d}$.*

Todistus. Seurauksen II.70 perusteella riittää osoittaa, että kaikilla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}^d$ ja kaikilla $s_1, \ldots, s_n \in \{\pm 1\}$ sylinterijoukkojen

$$C_{x_1}(s_1) \cap \cdots \cap C_{x_n}(s_n) = \big\{ \underline{\sigma} \in \Omega \;\big|\; \sigma_{x_1} = s_1, \ldots, \sigma_{x_n} = s_n \big\}$$

todennäköisyydet suppenevat. Seurauksen II.74 perusteella tämä tiedetään, kun $s_1 = \cdots = s_n = +1$. Lisäksi huomaamme, että muut sylinterit saadaan ottamalla komplementteja, $C_x(-1) = \Omega \setminus C_x(+1)$. Inkluusio-ekskluusiokaavan avulla mielivaltaisen sylinteritapahtuman todennäköisyys saadaan lausuttua äärellisenä summana sellaisten sylinteritapahtumien todennäköisyyksistä, joille $s_1 = \cdots = s_n = +1$. Sylinteritapahtumien todennäköisyyksien suppeneminen, ja siten myös jonon $(\nu_R^+)_{R\in\mathbb{N}}$ heikko suppeneminen, seuraa. □

Äärettömällä hilalla $\mathbb{Z}^d$ Ising mallilla on siis olemassa termodynaaminen raja, satunnainen spin-konfiguraatio $\underline{\sigma}\colon \mathbb{Z}^d \to \{\pm 1\}$, jonka jakauma ν^+ on heikko raja äärellisten laatikoiden spin-konfiguraatioiden jakaumista plus-reunaehdoilla. Täysin samoin voitaisiin konstruoida satunnainen spin-konfiguraatio $\underline{\sigma}\colon \mathbb{Z}^d \to \{\pm 1\}$, jonka jakauma ν^- on heikko raja äärellisten laatikoiden spin-konfiguraatioiden jakaumista miinus-reunaehdoilla.

On luonnollista pohtia, onko Ising-mallin jakauma äärettömällä hilalla $\mathbb{Z}^d$ jotenkin yksikäsitteinen — erityisesti ovatko ν^+ ja ν^- samat. Vastaus tähän liittyy läheisesti mallin faasitransitioon. Palaamme aiheeseen myöhemmin, mutta dimensioissa $d \geq 2$ osoittautuu esimerkiksi seuraavaa. Ilman ulkoista magneettikenttää, $B = 0$, korkeissa lämpötiloissa $\beta < \beta_c$ kaikki tällaiset heikot rajat ovat samat (paramagneettinen faasi), kun taas matalissa lämpötiloissa $\beta > \beta_c$ eri reunaehdoilla saadaan erilaisia termodynaamisia rajoja ja erityisesti $\nu^+ \neq \nu^-$ (ferromagneettinen faasi). Ulkoisen magneettikentän kanssa, $B \neq 0$, termodynaaminen raja taas on aina yksikäsitteinen, mutta ferromagneettisessa faasissa $\beta > \beta_c$ rajan riippuvuus magneettikentästä B on epäjatkuva pisteessä $B = 0$. Tätä käytöstä kannattaa verrata Luvun 3 tuloksiin Curie-Weiss -mallista.

5.3.2. *Itseään välttävän puoliavaruuskävelyn termodynaaminen raja*

Olkoon $\nu_{\mathcal{H}_N}$ tasainen todennäköisyysmitta N askeleen itseään välttävien puoliavaruuskävelyjen joukolla $\mathcal{H}_N$. Tulkitaan $\mathcal{H}_N \subset (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ jatkamalla kävely $\mathbf{X} \in \mathcal{H}_N$ vakiona viimeisen askeleensa jälkeen, eli ajanhetkestä N alkaen. Voimme siis ajatella kaikki $\nu_{\mathcal{H}_N}$, $N \in \mathbb{N}$, todennäköisyysmittoina avaruudella $(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$, ja soveltaa Luvun 5.1.1 asetelmaa. Perussylinterijoukot ovat tapahtumat

$$\left\{ \mathbf{X} \;\middle|\; \mathbf{X}|_{[\![0,T]\!]} = \tilde{\mathbf{X}} \right\},$$

missä $T \in \mathbb{N}$ ja $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{H}_T$ on jokin annettu T askeleen kävely. Kaikki sylinterijoukot (II.31), ja siten edelleen kaikki avoimet joukot, saadaan näiden numeroituvina yhdisteinä.

Haluamme osoittaa, että itseään välttävien puoliavaruuskävelyjen termodynaaminen raja on olemassa, ja kuvailla sen eksplisiittisesti yhtälön (II.29) määrittelemän redusoitumattomien siltojen todennäköisyysjakauman avulla.

Lause II.76. *Tasaiset todennäköisyysmitat $\nu_{\mathcal{H}_N}$ joukoilla $\mathcal{H}_N$ suppenevat heikosti kun $N \to \infty$ kohti jakaumaa, joka saadaan valitsemalla jono riippumattomia redusoitumattomia siltoja jakaumasta $\nu_{\mathcal{L}}$, ja konkatenoimalla ne.*

Todistus. Muistutamme Luvusta 4.4.4 seuraavat asiat, joihin suppenemisen olennainen idea jo sisältyykin. Puoliavaruuskävelyn $\mathbf{X}$ j:nnettä uusiutumishetkeä merkitsemme $\tau_j = \tau_j(\mathbf{X})$. Proposition II.52 mukaan kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja kaikilla redusoitumattomilla silloilla $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \ldots, \tilde{\mathbf{X}}^{(k)}$ pätee

$$\nu_{\mathcal{H}_N}\left[\left\{ \mathbf{X} \;\middle|\; \mathbf{X}|_{[\![0,\tau_k]\!]} = \tilde{\mathbf{X}}^{(1)} \boxplus \cdots \boxplus \tilde{\mathbf{X}}^{(k)} \right\}\right] \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \prod_{j=1}^{k} \nu_{\mathcal{L}}\left[\{\tilde{\mathbf{X}}^{(j)}\}\right].$$

Lisäksi Lemman II.51 perusteella kaikilla $k \geq 1$ pätee $\nu_N[\tau_k = \infty] \to 0$ kun $N \to \infty$.

Määrittelemme sitten kokoelman $\mathcal{E}$, joka koostuu joukoista, jotka ovat joko muotoa

$$\left\{ \mathbf{X} \;\middle|\; \tau_k < \infty \text{ ja } \mathbf{X}|_{[\![0,\tau_k]\!]} = \tilde{\mathbf{X}}^{(1)} \boxplus \cdots \boxplus \tilde{\mathbf{X}}^{(k)} \right\}$$

tai muotoa

$$\left\{ \mathbf{X} \;\middle|\; \tau_k = \infty \text{ ja } \mathbf{X}|_{[\![0,T]\!]} = \tilde{\mathbf{X}} \right\}.$$

Silloin siis kaikilla $E \in \mathcal{E}$ todennäköisyydet $\nu_{\mathcal{H}_N}[E]$ suppenevat (jälkimmäistä muotoa olevilla joukoilla nollaan). Kokoelma on suljettu äärellisten leikkausten suhteen. Perussylinteritapahtumat voidaan ilmaista numeroituvina yhdisteinä

$$\begin{aligned}\left\{ \mathbf{X} \;\middle|\; \mathbf{X}|_{[\![0,T]\!]} = \tilde{\mathbf{X}} \right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{\tilde{\mathbf{X}}^{(1)},\ldots,\tilde{\mathbf{X}}^{(k)} \in \mathcal{L} \\ (\tilde{\mathbf{X}}^{(1)} \boxplus \cdots \boxplus \tilde{\mathbf{X}}^{(k)})|_{[\![0,T]\!]} = \tilde{\mathbf{X}}}} & \left\{ \mathbf{X} \;\middle|\; \mathbf{X}|_{[\![0,\tau_k]\!]} = \tilde{\mathbf{X}}^{(1)} \boxplus \cdots \boxplus \tilde{\mathbf{X}}^{(k)} \right\} \\ & \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \mathbf{X} \;\middle|\; \tau_k = \infty \text{ ja } \mathbf{X}|_{[\![0,T]\!]} = \tilde{\mathbf{X}} \right\}.\end{aligned}$$

Kokoelma $\mathcal{E}$ siis toteuttaa Proposition II.69 ehdot, joten päättelemme heikon konvergenssin. Ylläolevasta eksplisiittisestä kaavasta (Propositio II.52) nähdään, että rajalla saadaan riippumattomien mitasta $\nu_{\mathcal{L}}$ valittujen redusoitumattomien siltojen konkatenaatio. $\square$