Saamme näin ylärajan puoliavaruuskävelyjen lukumäärälle.

Seuraus II.40. *Kaikilla $\tilde{\alpha} > \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ on olemassa $C > 0$ siten, että itseään välttävien puoliavaruuskävelyjen lukumäärä toteuttaa*

$$h_N \leq C\tilde{\mu}^N e^{\tilde{\alpha}\sqrt{N}},$$

missä $\tilde{\mu}$ on kuten Propositiossa II.37.

Todistus. Väitetty tulos saadaan yhdistämällä Lemman II.39 arvio $h_N \leq p'_N b_N$, Lemman II.38 arvio $p'_N \leq Ce^{\tilde{\alpha}\sqrt{N}}$, ja Proposition II.37 arvio $b_N \leq \tilde{\mu}^N$. □

4.3.3. *Itseään välttävien kävelyjen lukumäärän yläraja*

Päästäksemme käsiksi itseään välttäviin kävelyihin, tarkastelemme itseään välttävien kävelyjen katkaisemista kahdeksi puoliavaruuskävelyksi.

Lemma II.41. *Kaikilla $N \geq 0$ pätee*

$$c_N \leq \sum_{s=0}^{N} h_{s+1} h_{N-s}.$$

Todistus. Ideana on katkaista annettu kävely $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_N$ alimmasta kohdastaan, ajanhetkellä

$$s = \max\left\{ t \geq 0 \;\middle|\; \pi_1 \mathbf{X}(t) = \min_{0 \leq t' \leq N} \pi_1 \mathbf{X}(t') \right\}.$$

Kävelyn loppuosa, $\mathbf{X}|_{[\![s,N]\!]}$ on translaatio $N - s$ askeleen itseään välttävästä puoliavaruuskävelystä. Kävelyn alkuosaan $\mathbf{X}|_{[\![s,N]\!]}$ konkatenoimalla yksi askel suuntaan $-\underline{e}_1$ saadaan aikakäännetyn $s + 1$ askeleen puoliavaruuskävelyn translaatio. Lisäksi alkuperäinen kävely $\mathbf{X}$ voidaan rekonstruoida näistä kahdesta puoliavaruuskävelystä, eli saatu kuvaus $\mathcal{C}_N \to \bigsqcup_{s=0}^{N} \mathcal{H}_{s+1} \times \mathcal{H}_{N-s}$ on injektiivinen. Joukon $\mathcal{C}_N$ alkioiden lukumäärä on siten enintään joukon $\bigsqcup_{s=0}^{N} \mathcal{H}_{s+1} \times \mathcal{H}_{N-s}$ alkioiden lukumäärä $\sum_{s=0}^{N} h_{s+1} h_{N-s}$. □

Propositio II.42. *Kaikilla $\alpha > \pi\sqrt{2/3}$ on olemassa vakio $A > 0$ siten, että*

$$c_N \leq A\tilde{\mu}^N e^{\alpha\sqrt{N}}.$$

Todistus. Millä tahansa $\tilde{\alpha} > \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ on Seurauksen II.40 perusteella olemassa vakio C niin, että $h_N \leq C\tilde{\mu}^N e^{\tilde{\alpha}\sqrt{N}}$ kaikilla N. Lemman II.41 tuloksesta saamme siis

$$c_N \leq \sum_{s=0}^{N} h_{s+1} h_{N-s} \leq C^2 \tilde{\mu}^{N+1} \sum_{s=0}^{N} e^{\tilde{\alpha}(\sqrt{s+1} + \sqrt{N-s})}.$$

Käytämme sitten epäyhtälöä $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$ kirjoittaaksemme arvion

$$c_N \leq C^2 \tilde{\mu}^{N+1} (N+1) e^{\sqrt{2}\tilde{\alpha}\sqrt{N+1}}.$$

Tässä esiintyvät termit ovat haluttua suuruusluokkaa: nimittäin millä tahansa $\varepsilon > 0$ pätee

$$\frac{N+1}{e^{\varepsilon\sqrt{N}}} \longrightarrow 0 \qquad \text{ja} \qquad \frac{e^{\sqrt{2}\tilde{\alpha}\sqrt{N+1}} / e^{\sqrt{2}\tilde{\alpha}\sqrt{N}}}{e^{\varepsilon\sqrt{N}}} \longrightarrow 0,$$

joten suurilla N saamme

$$c_N \leq C^2 \tilde{\mu}^{N+1} e^{(\sqrt{2}\tilde{\alpha} + 2\varepsilon)\sqrt{N}}.$$

Luku $\sqrt{2}\tilde{\alpha} + 2\varepsilon$ saadaan mielivaltaisen lähelle haluttua $\pi\sqrt{2/3}$, ja äärellisen monta pientä N voidaan hoitaa erikseen vakion A kustannuksella. Päättelemme, että millä tahansa $\alpha > \pi\sqrt{2/3}$ on olemassa $A > 0$ siten, että $c_N \leq A\tilde{\mu}^N e^{\alpha\sqrt{N}}$. □

Seuraus II.43. *Itseään välttävien kävelyjen ja itseään välttävien puoliavaruuskävelyjen eksponentiaalisen kasvun vauhdit ovat samat, $\mu = \tilde{\mu}$. Toisin sanoen, kaikki seuraavat rajat ovat samat*

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{b_N} = \lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{h_N} = \lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{c_N} = \mu.$$

Todistus. Proposition II.42 tuloksesta saadaan $\limsup \sqrt[N]{c_N} \leq \tilde{\mu}$, mutta Proposition II.33 mukaan $\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{c_N} = \mu \geq \tilde{\mu}$, joten $\tilde{\mu} = \mu$. Siten Proposition II.37 tulos voidaan kirjoittaa $\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{b_N} = \mu$, ja lopulta $b_N \leq h_N \leq c_N$ antaa myös $\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{h_N} = \mu$. □

4.4. Itseään välttävien polymeerien generoivia funktioita

Useat fysikaaliset ja kombinatoriset ominaisuudet näyttäytyvät luonnollisimmillaan generoivien funktioiden avulla lausuttuna.

4.4.1. *Itseään välttävien kävelyjen lukumäärien generoiva funktio*

Itseään välttävien kävelyjen lukumäärän generoiva funktio on potenssisarja

$$G_{\mathcal{C}}(z) = \sum_{N=0}^{\infty} c_N z^N.$$

Tämän potenssisarjan suppenemissäde on $1/\limsup((c_N)^{1/N}) = \frac{1}{\mu}$, joten $G_{\mathcal{C}}$ on kompleksitason kiekossa $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < \frac{1}{\mu}\right\}$ analyyttinen funktio.

Kun $z > 0$, tämä generoiva funktio on itseasiassa eräänlainen suurkanoninen partitiofunktio polymeereille, joiden pituutta ei ole kiinnitetty, vaan jolla on parametristä z riippuva jakauma. Parametria z sanotaan kemiallisessa termodynamiikassa aktiviteetiksi, ja sen arvo $z_c = \frac{1}{\mu}$ on eräänlainen mallin kriittinen piste, analogiana aiemmin kohtaamillemme faasitransitiopisteille.

Positiivisilla $z > 0$, sarjan $G_{\mathcal{C}}(z)$ termit ovat positiivisia. Yllä lasketun suppenemissäteen perusteella huomataan, että kun $0 < z < z_c$, partitiofunktio on äärellinen, $0 < G_{\mathcal{C}}(z) < +\infty$, ja kun $z > z_c$ partitiofunktio divergoi $G_{\mathcal{C}}(z) = +\infty$. Positiivistermiselle sarjalle pätee monotonisen konvergenssin lauseen perusteella $G_{\mathcal{C}}(z) \nearrow G_{\mathcal{C}}(z_c)$ kun $z \nearrow z_c$.

Lemma II.44. *Kun $z \in (0, \frac{1}{\mu})$, generoivalle funktiolle $G_{\mathcal{C}}$ on voimassa*

$$G_{\mathcal{C}}(z) \geq \frac{1}{1 - \mu z},$$

ja erityisesti generoiva funktio divergoi kriittisessä pisteessä $G_{\mathcal{C}}(\frac{1}{\mu}) = +\infty$.

Todistus. Tämä seuraa suoraan Proposition II.33 alarajasta $c_N \geq \mu^N$ ja geometrisesta sarjasta $\sum_{N\geq 0} \mu^N z^N = \frac{1}{1-\mu z}$. □

Kriittinen eksponentti γ liittyy läheisesti generoivan funktion $G_{\mathcal{C}}$ divergenssin nopeuteen pisteen $z_c = \frac{1}{\mu}$ läheisyydessä.

Tehtävä II.14. Osoita, että jos $c_N = \mu^N N^{\gamma-1+o(1)}$ kun $N \to \infty$, niin $G_{\mathcal{C}}(z) \sim (z_c - z)^{-\gamma}$ kun $z \nearrow z_c = \frac{1}{\mu}$ eli

$$\lim_{z \nearrow z_c} \frac{\log\left(G_{\mathcal{C}}(z)\right)}{\log(z_c - z)} = -\gamma.$$

4.4.2. *Itseään välttävien puoliavaruuskävelyjen ja siltojen generoivat funktiot*

Itseään välttävien puoliavaruuskävelyjen ja siltojen lukumäärien generoivat funktiot ovat vastaavasti

$$G_{\mathcal{H}}(z) = \sum_{N=0}^{\infty} h_N z^N \qquad \text{ja} \qquad G_{\mathcal{B}}(z) = \sum_{N=0}^{\infty} b_N z^N.$$

Seurauksesta II.43 nähdään, että myös näiden molempien suppenemissäde on $\frac{1}{\mu}$.

Lemma II.45. *Kun $z \in (0, \frac{1}{\mu})$, on voimassa generoivien funktioiden välinen epäyhtälö*

$$G_{\mathcal{C}}(z) \leq \frac{1}{z} G_{\mathcal{H}}(z)^2,$$

ja erityisesti myös itseään välttävien puoliavaruuskävelyjen generoiva funktio divergoi kriittisessä pisteessä, $G_{\mathcal{H}}(\frac{1}{\mu}) = +\infty$.

Todistus. Lemmassa II.41 näimme, että $c_N \leq \sum_{s=0}^{N} h_{s+1} h_{N-s}$. Tätä käyttäen laskemme

$$\begin{aligned}
G_{\mathcal{C}}(z) &= \sum_{N \geq 0} c_N z^N \leq \sum_{N \geq 0} \sum_{s=0}^{N} h_{s+1} h_{N-s} z^N \\
&= \sum_{s \geq 0} \sum_{N \geq s} h_{s+1} h_{N-s} z^N && \text{(käytetiin Fubinia)} \\
&= \sum_{s \geq 0} \sum_{N' \geq 0} h_{s+1} h_{N'} z^{N'+s} && \text{(merkittiin } N' = N - s\text{)} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{s \geq 0} h_{s+1} z^{s+1} \sum_{N' \geq 0} h_{N'} z^{N'} \\
&= \frac{1}{z} \Big(G_{\mathcal{H}}(z) - 1 \Big) G_{\mathcal{H}}(z) && \text{(tunnistettiin generoivat funktiot)} \\
&\leq \frac{1}{z} G_{\mathcal{H}}(z)^2.
\end{aligned}$$

Tästä epäyhtälöstä ja aiemmasta tiedosta $G_{\mathcal{C}}(\frac{1}{\mu}) = +\infty$ seuraa $G_{\mathcal{H}}(\frac{1}{\mu}) = +\infty$. □

Lemma II.46. *Kun $z \in (0, \frac{1}{\mu})$, on voimassa generoivien funktioiden välinen epäyhtälö*

$$G_{\mathcal{H}}(z) \leq \exp\Big(G_{\mathcal{B}}(z) - 1 \Big),$$

ja erityisesti myös itseään välttävien siltojen generoiva funktio divergoi kriittisessä pisteessä, $G_{\mathcal{B}}(\frac{1}{\mu}) = +\infty$.

Todistus. Näimme Lemman II.39 todistuksessa, että kun $N > 0$, pätee

$$h_N \leq \sum_{k\geq 1} \sum_{a_k > \cdots > a_1 > 1} \sum_{\substack{M_1,\ldots,M_k\geq 1\\ M_1+\cdots+M_k=N}} \prod_{j=1}^{k} b_{M_j}[a_j].$$

Tätä käyttäen huomaamme, että

$$G_{\mathcal{H}}(z) = \sum_{N\geq 0} h_N z^N \leq \prod_{a=1}^{\infty} \Big(1 + \sum_{M\geq 1} b_M[a] z^M\Big).$$

Soveltamalla oikealla puolella lisäksi alkeellista epäyhtälöä $1 + x \leq e^x$ (kun $x \geq 0$), saamme

$$G_{\mathcal{H}}(z) \leq \exp\Big(\sum_{a=1}^{\infty} \big(\sum_{M\geq 1} b_M[a] z^M\big)\Big) = \exp\Big(G_{\mathcal{B}}(z) - 1\Big).$$

□

4.4.3. *Uusiutumishetket ja redusoitumattomat itseään välttävät sillat*

Kun $\mathbf{X} \in \mathcal{H}_N$ on N askeleen itseään välttävä puoliavaruuskävely, niin sanomme, että $t \in [\![1, N-1]\!]$ on kävelyn $\mathbf{X}$ *uusiutumishetki*, jos

$$\begin{aligned} &\pi_1\mathbf{X}(s) \leq \pi_1\mathbf{X}(t) \qquad \text{kaikilla } s \in [\![0, t]\!] \\ \text{ja} \qquad &\pi_1\mathbf{X}(s) > \pi_1\mathbf{X}(t) \qquad \text{kaikilla } s \in [\![t+1, N]\!], \end{aligned}$$

eli jos kävelyn alkuosa tähän hetkeen asti on silta ja jatko tämän ajanhetken jälkeen on puoliavaruuskävelyn translaatio. Itseään välttävää siltaa $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_N$, jolla ei ole uusiutumishetkiä, sanotaan redusoitumattomaksi. Merkitsemme redusoitumattomien itseään välttävien N askeleen siltojen joukkoa $\mathcal{L}_N$, ja lukumäärää $\lambda_N = \#\mathcal{L}_N$. Yhteenvetona määrittelemiemme itseään välttävien kävelyjen joukkojen sisältymisrelaatioista ja vastaavista lukumääriä koskevista epäyhtälöistä muistutamme

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_N \subset \mathcal{B}_N \subset \mathcal{H}_N \subset \mathcal{C}_N \subset \mathcal{W}_N \\ \text{ja} \qquad &\lambda_N \leq b_N \leq h_N \leq c_N \leq (2d)^N. \end{aligned}$$

Olemme käyttäneet konventiota, että nollan askeleen kävely on sekä silta, puoliavaruuskävely, että kävely, mutta emme halua tulkita sitä redusoitumattomaksi sillaksi — siis $b_0 = h_0 = c_0 = 1$, mutta $\lambda_0 = 0$. Redusoitumattomien itseään välttävien siltojen generoiva funktio on

$$G_{\mathcal{L}}(z) = \sum_{N=1}^{\infty} \lambda_N z^N.$$

Sarjan suppenemissäde on $1/\limsup(\sqrt[N]{\lambda_N}) \geq 1/\limsup(\sqrt[N]{c_N}) = \frac{1}{\mu}$, joten se määrittelee ainakin kiekossa $\Big\{z \in \mathbb{C} \,\Big|\, |z| < \frac{1}{\mu}\Big\}$ analyyttisen funktion.

Lemma II.47. *Itseään välttävillä silloilla ja redusoitumattomilla silloilla on seuraavat kombinatoriset ja generoivia funktioita koskevat yhteydet*

$$\text{kaikilla } N \geq 1 \qquad b_N = \sum_{k\geq 1} \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_k\geq 1\\ m_1+\cdots+m_k=N}} \lambda_{m_1} \cdots \lambda_{m_k}$$

$$\text{ja} \qquad G_{\mathcal{B}}(z) = \frac{1}{1 - G_{\mathcal{L}}(z)} \qquad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C},\ |z| < \frac{1}{\mu}.$$

Todistus. Huomataan ensin, että generoivia funktioita koskeva kaava on ensimmäisen kaavan suora seuraus. Nimittäin, käyttäen ensimmäistä kaavaa voidaan laskea

$$\begin{aligned}
G_{\mathcal{B}}(z) = \sum_{N\geq 0} b_N z^N &= \sum_{N\geq 0}\sum_{k\geq 0}\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_k\geq 1\\ m_1+\cdots+m_k=N}} \prod_{j=1}^{k}(\lambda_{m_j} z^{m_j}) \\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{m_1,\ldots,m_k\geq 1}\prod_{j=1}^{k}(\lambda_{m_j} z^{m_j}) = \sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{m\geq 1}\prod_{j=1}^{k}(\lambda_m z^m)\Big)^k \\
&= \sum_{k\geq 0} G_{\mathcal{L}}(z)^k = \frac{1}{1-G_{\mathcal{L}}(z)}.
\end{aligned}$$

Todistamme sitten kombinatorisen kaavan jo tutuksi tulleella tekniikalla — paloittelulla ja konkatenaatiolla. Jos $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_N$ on N askeleen itseään välttävä silta, niin $\mathbf{X}$ voidaan esittää yksikäsitteisesti redusoitumattomien siltojen konkatenaationa: jos nimittäin sillalla $\mathbf{X}$ on $k-1$ uusiutumishetkeä $t_1, \ldots, t_{k-1}$, ja asetamme $t_0 = 0$ ja $t_k = N$, niin $\mathbf{X}|_{[\![t_{j-1},t_j]\!]}$ on $m_j = t_j - t_{j-1}$ askeleen redusoitumatoman sillan translaatio kaikilla $1 \leq j \leq k$. Käänteinen pätee myös, konkatenoimalla mitkä tahansa redusoitumattomat sillat, joiden askelten lukumäärien m_j summa on N, saadaan N askeleen silta. Näin määritellään bijektio

$$\mathcal{B}_N \to \bigsqcup_{k}\bigsqcup_{\substack{m_1,\ldots,m_k\geq 1\\ m_1+\cdots+m_k=N}} \mathcal{L}_{m_1}\times\cdots\times\mathcal{L}_{m_k},$$

ja yhtälö $b_N = \sum\sum\prod b_{m_j}$ ilmaisee jälleen sen, että bijektiivisessä vastaavuudessa olevissa joukoissa on yhtä monta alkiota. □

Seuraus II.48. *Redusoitumattomien itseään välttävien siltojen lukumäärät* $(\lambda_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *toteuttavat nk. Kestenin relaation*

$$\sum_{N=1}^{\infty}\lambda_N \mu^{-N} = 1.$$

Todistus. Positiivistermisille sarjoille $G_{\mathcal{L}}(z) = \sum_{N\geq 1}\lambda_N z^N$ ja $G_{\mathcal{B}}(z) = \sum_{N\geq 0} b_N z^N$ pätee monotonisen konvergenssin lauseen perusteella $G_{\mathcal{L}}(z) \nearrow G_{\mathcal{L}}(\frac{1}{\mu})$ ja $G_{\mathcal{B}}(z) \nearrow G_{\mathcal{B}}(\frac{1}{\mu})$ kun $z \nearrow \frac{1}{\mu}$. Lemman II.47 relaatiosta $G_{\mathcal{B}}(z) = \frac{1}{1-G_{\mathcal{L}}(z)}$ ja Lemman II.46 johtopäätöksestä $G_{\mathcal{B}}(\frac{1}{\mu}) = +\infty$ seuraa siten, että $G_{\mathcal{L}}(\frac{1}{\mu}) = 1$. □

Merkitään $\mathcal{L} = \bigsqcup_{N\in\mathbb{N}}\mathcal{L}_N$ kaikkien eri pituisten itseään välttävien redusoitumattomien siltojen joukkoa. Edellisen seurauslauseen tärkein tulkinta on, että kaava

$$\nu_{\mathcal{L}}[\{\mathbf{X}\}] = \mu^{-N} \qquad \text{kaikilla } \mathbf{X}\in\mathcal{L}_N$$

määrittelee todennäköisyysmitan $\nu_{\mathcal{L}}$ redusoitumattomien itseään välttävien siltojen joukolla $\mathcal{L}$. Voidaan osoittaa, että itseään välttävien puoliavaruuskävelyjen termodynaaminen raja on olemassa, ja saadaan konkatenoimalla jono riippumattomia tästä jakaumasta $\nu_{\mathcal{L}}$ valittuja redusoitumattomia siltoja. Syy tälle selitetään seuraavaksi.

4.4.4. *Itseään välttävän puoliavaruuskävelyn termodynaamisesta rajasta*

Teemme nyt laskun, joka on avain itseään välttävän puoliavaruuskävelyn termodynaamisen rajan olemassaolon ja konstruoinnin kannalta. Tarvitsemme laskussa seuraavaa aputulosta, jota emme todista.

Lemma II.49. *Itseään välttävien puoliavaruuskävelyjen lukumäärät h_N toteuttavat*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{h_{N+1}}{h_N} = \mu.$$

Huomautus II.50. Väitteen $\lim_{N\to\infty} \frac{h_{N+2}}{h_N} = \mu^2$ todistus perustuu Harry Kestenin artikkeliin [**Kes63**], ja lukija löytää todistuksen halutessaan esimerkiksi kirjasta [**MS93**, Lauseen 7.3.4 todistus]. Lemman vahvempi väite $\lim_{N\to\infty} \frac{h_{N+1}}{h_N} = \mu$ on todistettu artikkelissa [**LSW04**] Kestenin tuloksesta lähtien.

Huomautetaan vielä, että Kesten on niinikään todistanut, että $\lim_{N\to\infty} \frac{c_{N+2}}{c_N} = \mu^2$, mutta vastaavaa vahvennusta $\lim_{N\to\infty} \frac{c_{N+1}}{c_N} = \mu$ ei ole onnistuttu osoittamaan — katso Avoin ongelma II.36.

Keskeinen lasku puoliavaruuskävelyjen termodynaamisesta rajasta on seuraava.

Lemma II.51. *Olkoon ν_N tasainen jakauma itseään välttävien N askeleen puoliavaruuskävelyjen joukolla $\mathcal{H}_N$. Kun $\mathbf{X} \in \mathcal{H}_N$, merkitään $\tau = \tau(\mathbf{X})$ kävelyn $\mathbf{X}$ ensimmäistä uusiutumishetkeä (sovitaan, että $\tau(\mathbf{X}) = \infty$, jos uusiutumishetkiä ei ole). Silloin kaikilla $m \in \mathbb{N}$ pätee*

$$\nu_N\left[\tau = m\right] \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_m \mu^{-m}.$$

Erityisesti $\lim_{N\to\infty} \nu_N[\tau = \infty] = 0$.

Todistus. Olkoon $m \in \mathbb{N}$. Sellaiset N askeleen puoliavaruuskävelyt $\mathbf{X} \in \mathcal{H}_N$, joille $\tau(\mathbf{X}) = m$ voidaan esittää konkatenaationa m askeleen redusoitumattomasta sillasta ja $N-m$ askeleen puoliavaruuskävelystä, ja päinvastoin, joten näiden kävelyjen lukumäärä on $\lambda_m h_{N-m}$. Silloin tasaisessa todennäköisyysmitassa joukolla $\mathcal{H}_N$ voidaan laskea todennäköisyys

$$\nu_N\left[\tau = m\right] = \frac{\#\left\{\mathbf{X} \in \mathcal{H}_N \,\middle|\, \tau(\mathbf{X}) = m\right\}}{\#\mathcal{H}_N} = \frac{\lambda_m h_{N-m}}{h_N}.$$

Lemman II.49 tuloksesta $\frac{h_{N+1}}{h_N} \to \mu$ saadaan kaikilla m

$$\frac{h_{N+m}}{h_N} = \frac{h_{N+m}}{h_{N+m-1}} \frac{h_{N+m-1}}{h_{N+m-2}} \cdots \frac{h_{N+1}}{h_N} \longrightarrow \mu^m \qquad \text{kun } N \to \infty,$$

joten ylläolevan todennäköisyyden raja kun $N \to \infty$ on

$$\nu_N\left[\tau = m\right] = \frac{\lambda_m h_{N-m}}{h_N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_m \mu^{-m}.$$

Jälkimmäistä väitettä varten huomataan, että

$$\nu_N[\tau = \infty] = 1 - \sum_{m=1}^{N-1} \nu_N[\tau = m] \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \mu^{-m} = 0$$

Seurauksen II.48 perusteella. □

Propositio II.52. *Olkoon ν_N tasainen jakauma itseään välttävien N askeleen puoliavaruuskävelyjen joukolla $\mathcal{H}_N$. Kun $\mathbf{X} \in \mathcal{H}_N$, merkitään $\tau_k = \tau_k(\mathbf{X})$ kävelyn $\mathbf{X}$ k:nnettä uusiutumishetkeä (sovitaan, että $\tau_k(\mathbf{X}) = \infty$, jos uusiutumishetkiä on vähemmän kuin k). Kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee $\nu[\tau_k = \infty] \to 0$ kun $N \to \infty$. Lisäksi kaikilla $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \ldots, \tilde{\mathbf{X}}^{(k)}$, missä $\tilde{\mathbf{X}}^{(j)} \in \mathcal{L}_{m_j}$, pätee*

$$\nu_N\left[\mathbf{X}|_{[\![0,\tau_k]\!]} = \tilde{\mathbf{X}}^{(1)} \boxplus \cdots \boxplus \tilde{\mathbf{X}}^{(k)}\right] \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \prod_{j=1}^{k} \nu_{\mathcal{L}}[\tilde{\mathbf{X}}^{(j)}].$$

Todistus. Väite todistetaan samoin kuin edellinen Lemma — nimittäin annetuilla $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \ldots, \tilde{\mathbf{X}}^{(k)}$, sellaiset N askeleen puoliavaruuskävelyt $\mathbf{X} \in \mathcal{H}_N$, joille $\mathbf{X}|_{[\![0,\tau_k]\!]} = \tilde{\mathbf{X}}^{(1)} \boxplus \cdots \boxplus \tilde{\mathbf{X}}^{(k)}$, voidaan esittää konkatenaationa näistä redusoitumattomista silloista $\tilde{\mathbf{X}}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$ ja jostakin $N - \sum_{i=1}^{k} m_i$ askeleen puoliavaruuskävelystä, ja päinvastoin. $\square$

Kirjallisuutta

[AD99] David Aldous and Persi Diaconis. Longest increasing subsequences: from patience sorting to the Baik-Deift-Johansson theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 36(4):413–432, 1999.

[BIS09] David C. Brydges, John Z. Imbrie, and Gordon Slade. Functional integral representations for self-avoiding walk. *Probability Surveys*, 6:34–61, 2009.

[BS85] David Brydges and Thomas Spencer. Self-avoiding walk in 5 or more dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 97(1-2):125–148, 1985.

[Dur96] Richard Durrett. *Probability: Theory and Examples.* Duxbury Press, 2nd edition, 1996.

[Erd42] P. Erdös. On an elementary proof of some asymptotic formulas in the theory of partitions. *Ann. Math.*, 43:437–450, 1942.

[ET85] G. Elfving and P. Tuominen. *Todennäköisyyslaskenta II.* Limes ry, Helsinki, 1985.

[FS10] Patrik L. Ferrari and Herbert Spohn. Random growth models. Review article, [arXiv:1003.0881]., 2010.

[Gri10] Geoffrey Grimmett. *Probability on graphs*, volume 1 of *IMS Textbooks Series.* Cambridge University Press, 2010.

[Hol02] Ilkka Holopainen. Mitta ja integraali, 2002. Luentomuistiinpanot, Helsingin yliopisto.

[HR18] G. H. Hardy and S. Ramanujan. Asymptotic formulae in combinatory analysis. *Proc. London Math. Soc.*, 17:75–115, 1918.

[HS92] Takashi Hara and Gordon Slade. Self-avoiding walk in five or more dimensions I. The critical behaviour. *Commun. Math. Phys.*, 147:101–136, 1992.

[Kes63] Harry Kesten. On the number of self-avoiding walks. *J. Math. Phys*, 4:960–.969, 1963.

[Kup12] Antti Kupiainen. Introduction to statistical mechanics, 2012. Luentomuistiinpanot, Helsingin yliopisto.

[LSW04] Gregory F. Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. On the scaling limit of planar self-avoiding walk. In *Fractal geometry and applications: a jubilee of Benoît Mandelbrot, Part 2*, volume 72 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 339–364. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[MS93] Neal Madras and Gordon Slade. *The self-avoiding walk.* Birkhäuser, 1993.

[Rei98] Linda E. Reichl. *A modern course in statistical physics.* John Wiley & Sons, Inc, 2nd edition, 1998.

[Sla87] Gordon Slade. The diffusion of self-avoiding random walk in high dimensions. *Commun. Math. Phys.*, 110:661–683, 1987.

[Sla89] Gordon Slade. The scaling limit of self-avoiding random walk in high dimensions. *Ann. Probab.*, 17:91–107, 1989.

[Sot06] Tommi Sottinen. Todennäköisyysteoria, 2006. Luentomuistiinpanot, Helsingin yliopisto.

[Tuo07] Pekka Tuominen. *Todennäköisyyslaskenta I.* Limes ry., 8. painos edition, 2007.

[Väi07] Jussi Väisälä. *Topologia I.* Limes ry., 4. painos edition, 2007.

[Wil91] David Williams. *Probability with Martingales.* Cambridge Univ. Press, 1991.