3.2. Tiukkuus

Tiukkuus on ehto joka takaa, ettei todennäköisyysmassaa karkaa äärettömään — se sanoo, että todennäköisyysmittaperheen jokaisen mitan massasta valtaosa löytyy samasta kompaktista joukosta.

Määritelmä I.49. Sanomme, että kokoelma $(\nu_i)_{i\in I}$ todennäköisyysmittoja $\mathbb{R}$:llä on *tiukka*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $R > 0$ siten, että

$$\nu_i\Big[\mathbb{R} \setminus [-R, R]\Big] < \varepsilon \qquad \forall i \in I.$$

Lemma I.50. *Olkoon $(\nu_i)_{i\in I}$ kokoelma todennäköisyysmittoja $\mathbb{R}$:llä ja $(F_i)_{i\in I}$ vastaavat kertymäfunktiot. Kokoelma $(\nu_i)_{i\in I}$ on tiukka jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa R siten, että*

$$F_i(-R) < \varepsilon \qquad ja \qquad F_i(R) > 1 - \varepsilon \qquad\qquad \forall i \in I.$$

Tiukkuus on eräänlainen esikompaktisuusominaisuus heikon konvergenssin topologiassa. Käytännöllinen muotoilu tästä on seuraava.

Lause I.51. *Olkoon $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiukka jono todennäköisyysmittoja $\mathbb{R}$:llä. Silloin on olemassa osajono $(\nu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, joka suppenee heikosti.*

Todistus. Reaalisten todennäköisyysmittojen tapauksessa tämä seuraa kertymäfunktioita tarkastelemalla, kts. Tehtävä I.8. Palaamme myöhemmin yleisempään tapaukseen. □

Tehtävä I.8 (Suppeneva osajono tiukalle kertymäfunktiojonolle)**.** Olkoot $F_n : \mathbb{R} \to [0, 1]$ kertymäfunktioita, kun $n \in \mathbb{N}$.

(a) Osoita, että jonolla $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on osajono $(F_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, joka suppenee pisteittäin kohti jotakin monotonista funktiota $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ kaikissa funktion F jatkuvuuspisteissä.

(b) Oletetaan lisäksi, että kertymäfunktioita F_n vastaavat todennäköisyysmitat muodostavat tiukan perheen. Osoita, että kohdan (a) osajonoraja F on kertymäfunktio.

Vihje: Hoida ensin suppeneminen numeroituvassa tiheässä $\mathbb{R}$:n osajoukossa, käyttäen yksikkövälin kompaktisuutta sekä lävistäjäosajonon poimintaa. Kertymäfunktioiksi kelpaavat funktiot on karakterisoitu Propositiossa I.31.

Lause I.52. *Olkoon $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono todennäköisyysmittoja $\mathbb{R}$:llä, ja $\chi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vastaavat karakteristiset funktiot $\chi_n(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} \, d\nu_n(x)$.*

Todennäköisyysmittajono $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee heikosti jos ja vain jos funktiojono $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee pisteittäin kohti funktiota $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, joka on jatkuva pisteessä $\theta = 0$. Tällöin χ on rajamitan karakteristinen funktio.

Huomautus I.53. Tämä lause todistaa erityisesti Lauseen I.41 todistuksessa ohitetut implikaatiot: "vain jos" osuus näyttää, että (i) ⇒ (iii), ja "jos" osuus näyttää, että (iii) ⇒ (i). Jälkimmäistä koskien tulos on itseasiassa vahvempi: emme etukäteen oleta, että raja χ on jonkin todennäköisyysmitan karakteristinen funktio. Ehto on siten mukavampi tarkistaa käytännössä.

Huomautus I.54. Epätriviaali osa väitettä on "jos" osuus: haluamme päätellä todennäköisyysmittajonon $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenemisen. Todistuksen strategia kaksiosainen ja toistuvasti tärkeä:

(1) Osoitetaan jonon *prekompaktisuus* (tässä tapauksessa mittaperheen $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiukkuus), josta seuraa, että *kaikilla osajonoilla on suppenevia osajonoja.*
(2) Karakterisoidaan eksplisiittisesti minkä tahansa suppenevan osajonon raja (tässä tapauksessa näyttämällä, että χ on rajan karakteristinen funktio), ja päätellään, että *kaikilla suppenevilla osajonoilla on sama raja.*

Näistä kahdesta seuraa tavallisilla topologisilla argumenteilla, että koko jono suppenee.

Todistus. "Vain jos": Oletetaan heikko suppeneminen $\nu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \nu$. Koska $x \mapsto e^{\mathrm{i}\theta x}$ on jatkuva ja rajoitettu (reaali ja imaginääriosa erikseen), pätee siis määritelmän perusteella $\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\theta x}\,\mathrm{d}\nu_n(x) \to \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\theta x}\,\mathrm{d}\nu(x)$, eli karakteristiset funktiot χ_n suppenevat kohti mitan ν karakteristista funktiota χ, joka on jatkuva origossa.

"Jos": Oletetaan, että $\chi_n(\theta) \to \chi(\theta)$ kaikilla $\theta \in \mathbb{R}$, missä
$$\lim_{\theta\to 0} \chi(\theta) = \chi(0) = \lim_{n\to\infty} \chi_n(0) = 1.$$
Osoitamme ensin todennäköisyysmittajonon $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiukkuuden. Apuna käytämme laskua
$$\int_{-u}^{u} (1 - e^{\mathrm{i}\theta x})\,\mathrm{d}\theta = 2u - \frac{2\sin(ux)}{x}.$$
Jakamalla puolittain u:lla, integroimalla muuttuja x mittaa ν_n kohti, käyttämällä Fubinin lausetta yhtälön vasemmalla puolella, ja arvioimalla yhtälön oikeaa puolta alhaalta, saamme
$$\begin{aligned}\frac{1}{u}\int_{-u}^{u} (1 - \chi_n(\theta))\,\mathrm{d}\theta &= 2\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\Big(1 - \frac{\sin(ux)}{ux}\Big)}_{\geq 0,\ \text{koska}\ \frac{\sin(\xi)}{\xi}\leq 1}\,\mathrm{d}\nu_n(x) \\ &\geq 2\int_{\mathbb{R}\setminus(-\frac{2}{u},\frac{2}{u})} \underbrace{\Big(1 - \frac{\sin(ux)}{|ux|})\Big)}_{\geq\frac{1}{2},\ \text{kun}\ |x|\geq 2/u}\,\mathrm{d}\nu_n(x) \\ &\geq \nu_n\Big[\mathbb{R}\setminus(-\frac{2}{u},\frac{2}{u})\Big].\end{aligned}$$
Tämä epäyhtälö antaa karakteristisen funktion avulla lausutun ylärajan välin $(-\frac{2}{u},\frac{2}{u})$ komplementin mitalle. Seuraavaksi käytämme oletusta $\chi(\theta) \to 1$ kun $\theta \to 0$ — millä tahansa $\varepsilon > 0$ voimme tämän perusteella valita $u > 0$ niin pieneksi, että
$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u} (1 - \chi(\theta))\,\mathrm{d}\theta \leq \varepsilon.$$
Koska $\chi_n(\theta) \to \chi(\theta)$, dominoidun konvergenssin lauseen perusteella (dominoivaksi funktioksi kelpaa vakiofunktio) kaikilla tarpeeksi suurilla n pätee
$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u} (1 - \chi_n(\theta))\,\mathrm{d}\theta \leq 2\varepsilon.$$
Aiemmasta epäyhtälöstä päättelemme, että yllä valitulla u ja kaikilla tarpeeksi suurilla n saamme
$$\nu_n\Big[\mathbb{R}\setminus(-\frac{2}{u},\frac{2}{u})\Big] \leq 2\varepsilon.$$
Satunnaismuuttujajonon tiukkuus seuraa, koska jonon alkupään äärellisen monta jäsentä voidaan huomioida erikseen, ja ε oli mielivaltainen.

Koska $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on tiukka, on olemassa suppenevia osajonoja $(\nu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Tällaisen suppenevan osajonon rajan $\nu_{n_k} \to \nu$ karakteristinen funktio on χ, nimittäin taas
$$\chi(\theta) = \lim_{k\to\infty} \chi_{n_k}(\theta) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\theta x}\,\mathrm{d}\nu_{n_k}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\theta x}\,\mathrm{d}\nu(x).$$
Siis kaikkien suppenevien osajonojen raja on sama. Jonon $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppeneminen seuraa. $\square$

4. Riippumattomien satunnaismuutujien summa ja raja-arvolauseita

Varsin usein todennäköisyysteorian mallin määritelmä alkaa siten, että oletetaan annetuksi jono *riippumattomia ja samoin jakautuneita* satunnaismuuttujia $X_1, X_2, X_3, \ldots$ Näistä satunnaismuuttujista muodostetaan toinen jono satunnaismuuttujia

$$Z_n = f_n(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

jonka ominaisuuksia tutkitaan. Siksi yllä oleva kursivoitu teksti toistuu usein todennäköisyysteoriassa. Englanniksi tämä lyhennetään i.i.d. (engl. *independent and identically distributed*). Tässä funktio f_n on esimerkiksi

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{tai} \quad f_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

Tässä ja seuraavassa luvussa käsittelemme erittäin klassista aihetta todennäköisyyslaskennassa, nimittäin ensimmäistä yllä mainituista esimerkeistä: riippumattomien satunnaismuuttujien summaa

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k. \tag{I.12}$$

Tässä luvussa tarkastelemme erityisesti rajaa $n \to \infty$ summalle S_n. Tärkeimmät tulokset ovat kahden tyyppisiä:

- *Suurten lukujen lait*: $n^{-1} S_n \to \mu = \mathsf{E}[X_k]$
  - ts. keskiarvo useasta riippumattomasti toistetusta satunnaisotoksesta lähestyy yksittäisen otoksen odotusarvoa.
- *Keskeiset raja-arvolauseet*: $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{w}} N(0, \sigma^2)$, missä $\sigma^2 = \mathsf{Var}[X_k]$.
  - ts. summan S_n satunnaiset vaihtelut suurten lukujen lain antaman käyttäytymisen ympärillä ovat suuruusluokkaa $\sqrt{n}$ ja lähestyvät jakaumansa muodolta Gaussisia.

Huomautus I.55. Mittausvirheiden tilastollinen käsittely käyttää tyypillisesti yllä mainittuja osia. Kun suoritetaan useita mittauksia vaikkapa fysikaalisesta suureesta, ja mittauksiin sisältyy satunnaista virhettä, on yleensä relevanttia olettaa virheet riippumattomiksi. Silloin mittausten otoskeskiarvo saadaan lähelle fysikaalisen suureen arvoa koetta ja mittausta toistamalla, kunhan satunnaiset virheet ovat odotusarvoltaan nollia. Tilastollinen virhe otoskeskiarvossa pienenee verrannollisena toistojen määrän neliöjuuren käänteislukuun, kunhan virheet ovat varianssiltaan rajoitettuja. Silloin myös virheiden jakaumaa voidaan approksimoida normaalijakaumalla.

Esimerkki I.56. Kiinnitetyllä p, binomijakauma $\mathrm{Bin}(n, p)$ on myös summan $\sum_{k=1}^{n} X_k$ jakauma, jos $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ovat riippumattomia samoin jakautuneita, *Bernoulli jakaumalla* $X_k \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$ eli $\mathsf{P}\big[X_k = 0\big] = p$, $\mathsf{P}\big[X_k = 1\big] = 1 - p$. Kuvan I.1 binomijakaumat kasvavilla n havainnollistavat sekä suurten lukujen lakia että keskeistä raja-arvolausetta.

4.1. Suurten lukujen laki

4.1.1. *Eri kovergenssikäsitteet*

Aloitamme esittelemällä todennäköisyysteorian yleisimmät konvergenssikäsitteitä satunnaismuuttujille. Alla kaikki satunnaismuuttujat ovat määritelty samalla todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Määritelmä I.57. Olkoon $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono satunnaismuuttujia, $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$,ja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia.

- Sanomme, että (X_n) *suppenee stokastisesti*[7] kohti satunnaismuuttujaa X, ja merkitsemme $X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} X$, jos ja vain jos jokaisella $\varepsilon > 0$
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left[|X_n - X| > \varepsilon\right] = 0.$$
- Sanomme, että (X_n) *suppenee L^p:ssä* kohti satunnaismuuttujaa X, ja merkitsemme $X_n \xrightarrow{L^p} X$, jos ja vain jos
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left[|X_n - X|^p\right] = 0.$$
- Sanomme, että (X_n) *suppenee melkein varmasti* kohti satunnaismuuttujaa X, ja merkitsemme $X_n \xrightarrow{\text{m.v.}} X$, jos ja vain jos
$$\mathsf{P}\left[X = \lim_{n\to\infty} X_n\right] = 1.$$

Suppenemiselle melkein varmasti käytämme myös merkintöjä $X = \text{mv.-}\lim_{n\to\infty} X_n$ ja $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ mv.

Huomautus I.58. Todennäköisyydessä suppeneminen voidaan kuvailla siten, että mikäli X_n on jonkinlainen arvio X:lle, niin tämän arvion virheen $|X_n - X|$ todennäköisyys olla yli annettun "virhetoleranssin" ε menee nollaan n:n kasvaessa. Tämä vastaa tilastotieteen näkemystä hyvästä arviosta (ns. konsistentti estimaattori). Supeneminen L^p:ssä ja melkein varmasti vastaavat funktionaalianalyysin ja mittateorian vastaavia käsitteitä.

Näillä suppenemiskäsitteillä on keskinäisiä seuraamussuhteita. Todistamme näistä ainoastaan seuraavan.

Lemma I.59. *Jos $X_n \overset{L^p}{\to} X$, kun $n \to \infty$, niin silloin myös $X_n \overset{\mathsf{P}}{\to} X$.*

Todistus. Chebyshevin epäyhtälön perusteella,
$$\mathsf{P}\left[|X_n - X| > \varepsilon\right] \le \frac{\mathsf{E}\left[|X_n - X|^p\right]}{\varepsilon^p} \to 0,$$
kun $n \to \infty$. □

Tehtävä I.9. Osoita, että $X_n \overset{\mathsf{P}}{\to} X$, kun $n \to \infty$, jos ja vain jos
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right] = 0.$$

4.1.2. *Vahva suurten lukujen laki*

Todistamme nyt erään vahvan suurten lukujen lain. Sana vahva viittaa siihen, että suppeneminen on melkein varmaa.

Lause I.60. *Olkoon $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ riippumattomia ja samoin jakautuneita neliöintegroituvia*[8] *satunnaismuuttujia. Oletetaan, että $\mu = \mathsf{E}[X_k]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_k] < \infty$ kaikilla k. Jos $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, niin silloin $n^{-1}S_n \to \mu$ melkein varmasti, kun $n \to \infty$.*

---

[7] Toisinaan käytetään ilmaisua *suppenee todennäköisyydessä*.

[8] Neliöintegroituva tarkoittaa, että $\mathsf{E}\left[|X_k|^2\right] < \infty$.

Todistus. Voidaan olettaa, että $\mu = \mathsf{E}[X_n] = 0$. Muutoin voitaisiin todistaa satunnaismuuttujille $Z_n = X_n - \mu$, että niiden summa $n^{-1}\sum_{k=1}^n Z_k$ suppenee kohti 0:aa melkein varmasti, jolloin $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^n X_k = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^n (Z_k + \mu) = \mu$ melkein varmasti.

Oletetaan siis, että $\mathsf{E}[X_n] = 0$ ja $\mathsf{E}[X_n^2] = \sigma^2$ ja että (X_n) ovat riippumattomia. Satunnaismuuttuja $Y_n := n^{-1}S_n = n^{-1}\sum_{k=1}^n X_k$ toteuttaa

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\big[Y_n\big] &= 0 \\ \mathsf{E}\big[Y_n^2\big] &= \frac{1}{n^2}\sum_{j,k=1}^n \mathsf{E}\big[X_j X_k\big] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \mathsf{E}\big[X_k^2\big] = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Siispä $Y_n \to 0$ L^2:ssa, kun $n \to \infty$.

Todistaaksemme, että $Y_n \to 0$ melkein varmasti, osoitamme ensin, että osajono $Y_{n^2} \to 0$ melkein varmasti. Huomaamme, että monotonisen konvergenssin lauseen perusteella

$$\mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^\infty Y_{n^2}^2\right] = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sigma^2}{n^2} < \infty,$$

mistä seuraa, että $\sum_{n=1}^\infty Y_{n^2}^2 < \infty$ melkein varmasti. Koska suppenevan sarjan termit menevät välttämättä nollaan, toteamme näin myös, että $Y_{n^2} \to 0$ melkein varmasti.

Olkoon jokaisella $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ kokonaisluku siten että

$$p(n)^2 \le n < (p(n)+1)^2.$$

Huomaamme, että

$$\mathsf{E}\left[\left(Y_n - \frac{p(n)^2}{n}Y_{p(n)^2}\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=p(n)^2+1}^n \mathsf{E}\big[X_k^2\big] = \frac{n-p(n)^2}{n^2}\sigma^2 \le \frac{3\sigma^2}{n^{3/2}}$$

koska

$$n - p(n)^2 < 2p(n) + 1 \le 2\sqrt{n} + 1 \le 3\sqrt{n}.$$

Koska $\sum_{n=1}^\infty n^{-3/2} < \infty$, niin sama päättely kuin yllä osoittaa, että melkein varmasti $Y_n - p(n)^2 n^{-1} Y_{p(n)^2} \to 0$, kun $n \to \infty$. Kun huomaamme vielä, että $p(n)^2 n^{-1} \to 1$, kun $n \to \infty$, olemme todistaneet väitteen. □

Seuraus I.61. *Olkoon X_k kuten edellä ja oletamme, että $\mathsf{P}\big[X_k = 1\big] = p \in [0,1]$ and $\mathsf{P}\big[X_k = -1\big] = 1 - p$. Silloin $S_n \to +\infty$ melkein varmasti, kun $p > 1/2$, ja $S_n \to -\infty$ melkein varmasti, kun $p < 1/2$.*

Esimerkki I.62 (Monte Carlo -integrointi)**.** Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mitallinen ja $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$.[9] Haluamme approksimoida integraalia

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

satunnaisen summan

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(U_k)$$

avulla, missä $U_1, U_2, U_3, \ldots$ ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka ovat yksikkövälillä tasaisesti jakautuneita, $U_k \sim \mathrm{Tas}([0,1])$ eli $\mathsf{P}[U \le x] = x$, kun $0 \le x \le 1$ (kts. myös Esimerkki I.13). Silloin myös $(f(U_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, odotusarvoltaan

$$\mathsf{E}\big[f(U_k)\big] = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[9] Tämä on riittävä oletus, jos käytämme Kolmogorovin vahvaa suurten lukujen lakia, Lausetta I.64. Jos haluamme pitäytyä yllä todistetussa Lauseessa I.60, olettakaamme lisäksi, että $\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$, jolloin esimerkissä esiintyvillä satunnaismuuttujilla $f(U_k)$ on äärellinen varianssi.

Siis suurten lukujen lain mukaan

$$I_n \to \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

melkein varmasti, kun $n \to \infty$. Koska esimerkiksi tietokoneella voidaan vaivatta simuloida satunnaislukuja (U_k) ja laskea keskiarvoja $\frac{1}{n}I_n$, antaa tämä havainto menetelmän integraalin $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ numeeriseksi evaluoimiseksi.

Menetelmä yleistyy suoraviivaisesti integraaleihin, jotka ovat muotoa

$$\int_{[0,1]^d} f(x_1, x_2, \dots, x_d)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_d.$$

Yksinkertaisille integraaleille tämä on huono menetelmä, mutta esim. korkeaulotteisessa tapauksessa Monte Carlo -integrointi voi olla käyttökelpoinen.

Esimerkki I.63. Jos Esimerkin I.62 ideaa sovelletaan funktioon $f(x, y) = \mathbb{1}_{x^2+y^2\leq 1}$ saadaan, että melkein varmasti, kun $n \to \infty$,

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k, Y_k)$$

missä $(X_k, Y_k)_{k=1,2,\dots}$ ovat riippumattomia ja $X_k, Y_k \sim \mathrm{Tas}([-1, 1])$. Tässä muutama π:n likiarvo laskettuna tällä kaavalla kun $n = 10\,000$:

3.1236 3.1164 3.1292 3.1620 3.1528 3.1584 3.1644 3.1304

Satunnaismuuttujan $4f(X, Y)$ odotusarvo on $\mu = \pi$ ja keskihajonta $\sigma = \sqrt{\pi(4-\pi)}$. Keskeisen raja-arvolauseen mukaan virheen yllä olevissa arvioissa tulisi olla suuruudeltaan luokkaa $\sigma/\sqrt{n} \approx 0.0164$.

4.1.3. *Muita suurten lukujen lain muotoiluja*

Oletus toisen momentin olemassa olosta suurten lukujen laissa ei ollut välttämätön. Seuraava lause on melko yleinen muotoilu suurten lukujen laille. Emme todista sitä.

Lause I.64 (Kolmogorovin vahva suurten lukujen laki). *Olkoon (X_j) riippumattomia ja samoin jakautuneita ja $\mu \in \mathbb{R}$. Olkoon $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Silloin $n^{-1}S_n \to \mu$ melkein varmasti, jos ja vain jos $\mathsf{E}(X_j) = \mu$. Tällöin suppeneminen tapahtuu myös L^1:ssä.*

Seuraavassa tehtävässä lievennetään oletusta termien riippumattomuudesta, oletetaan vain termit korreloitumattomiksi. Tehtävän (b)-kohdan tulos on stokastinen konvergenssi (suppeneminen todennäköisyydessä) satunnaismuuttujille $n^{-1}S_n$.

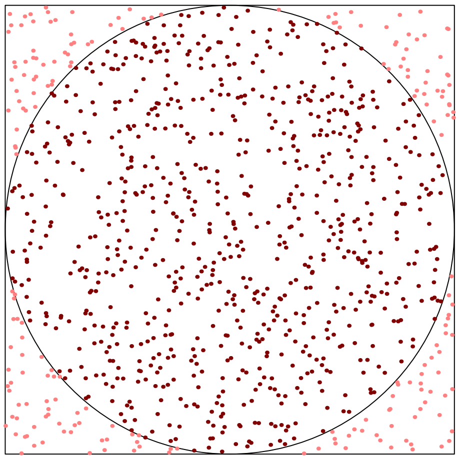
Tehtävä I.10 (Heikko suurten lukujen laki korreloitumattomille summattaville).

(a) Todista Chebyshevin epäyhtälö: jos $X \geq 0$ on satunnaismuuttuja, niin kaikilla positiivisilla luvuilla y pätee

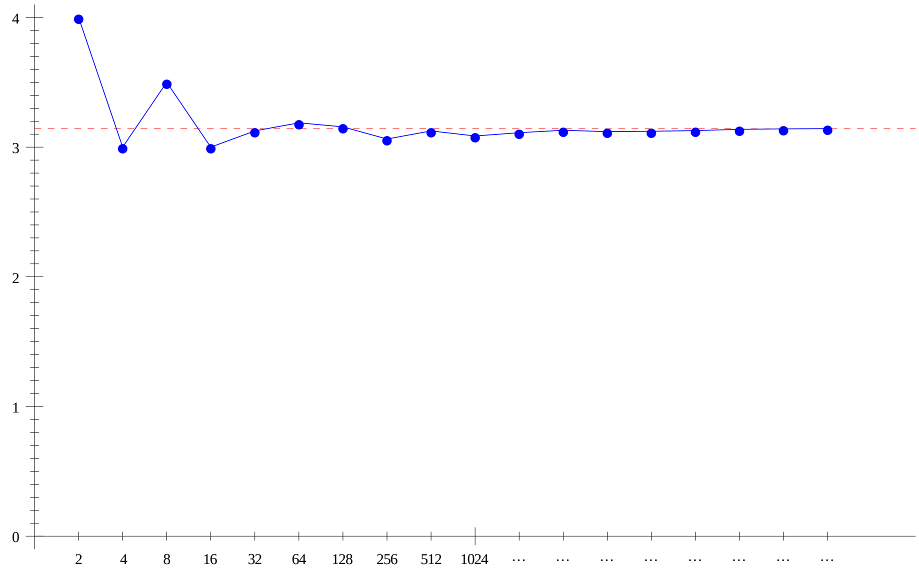
$$\mathsf{P}[X \geq y] \leq \frac{\mathsf{E}\left[X^p\right]}{y^p}.$$

(b) Olkoot satunnaismuuttujat X_j, $j \in \mathbb{N}$, neliöintegroituvia ja korreloitumattomia.[10] Oletetaan, että $\mathsf{E}[X_j] = \mu$ ja $\mathsf{Var}[X_j] \leq C$ kaikilla j. Määritellään $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Osoita, että

[10]Satunnaismuuttuja X on neliöintegroituva, jos $\mathsf{E}[X^2] < \infty$. Neliöintegroituvat satunnaismuuttujat X ja Y ovat korreloitumattomia, jos $\mathsf{Cov}(X, Y) := \mathsf{E}[XY] - \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y] = 0$.



(a) Tuhat satunnaista pistettä neliössä. Näistä pisteistä noin osuus $\pi/4$ on kuvan ympyrän sisällä.



(b) Osuus pisteistä ympyrän sisällä kerrottuna neljällä suppenee melkein varmasti kohti lukua π kun lukumäärä n kasvaa.

KUVA I.6. Monte Carlo integrointi ja luvun π satunnaiset approksimaatiot. Kuva I.6(a): Tuhat satunnaista pistettä neliössä. Kuva I.6(b): Ympyrän sisällä olevista pisteistä saatu arvio luvulle π.

kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee $\mathsf{P}\left[\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| > \varepsilon\right] \to 0$ kun $n \to \infty$ johtamalla epäyhtälö

$$\mathsf{P}\left[\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| > \varepsilon\right] \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

4.2. Keskeinen raja-arvolause

Keskeinen raja-arvolause kertoo S_n:n poikkeaman $n\mu$:stä suurilla n. Erityisesti se on tulos gaussisten satunnaismuuttujien universaalisuudesta: gaussisella satunnaismuuttujalla voidaan approksimoida satunnaismuuttujien summaa aina, kun yksittäisten summattavien suuruus koko summaan nähden on pieni. Tämä oletus ei tietenkään aina pidä paikaansa, vertaa Esimerkkiin I.46, missä S_n suppenee kohti Poisson(λ):aa.[11]

4.2.1. *Aputulos karakteristisesta funktiosta ja momenteista*

Tarvitsemme myös seuraavaa lausetta, joka antaa neliöintegroituvan satunnaismuuttujan karakteristisen funktion kehitelmän origossa toiseen kertalukuun asti. Vertaa Esimerkkiin I.27, jossa nähtiin kehitelmän ensimmäinen termi.

Propositio I.65. *Jos* $\mathsf{E}[X^2] < \infty$*, niin kun* $\theta \to 0$ *(*$\theta \in \mathbb{R}$*)*

$$\mathsf{E}\big[\exp(\mathrm{i}\theta X)\big] = 1 + \mathrm{i}\theta\,\mathsf{E}[X] - \frac{\theta^2}{2}\mathsf{E}[X^2] + o(\theta^2).$$

Todistus. Kirjoitetaan ensin

$$e^{\mathrm{i}\theta x} = 1 + \mathrm{i}\theta \int_0^x e^{\mathrm{i}\theta u}\,\mathrm{d}u.$$

Kun tätä sovelletaan kaksi kertaa, saadaan

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\theta x} &= 1 + \mathrm{i}\theta x - \theta^2 \int_0^x \Big(\int_0^u e^{\mathrm{i}\theta v}\,\mathrm{d}v\Big)\,\mathrm{d}u \\ &= 1 + \mathrm{i}\theta x - \frac{\theta^2}{2}x^2 - \theta^2 \int_0^x \Big(\int_0^u (e^{\mathrm{i}\theta v} - 1)\,\mathrm{d}v\Big)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Tarkastellaan sitten väitetyn arvion virhettä, käytetään integraalin kolmioepäyhtälöä (sekä odotusarvolle että muuttujien u ja v yli otetuille integraaleille)

$$\begin{aligned} \Big|\mathsf{E}\big[\exp(\mathrm{i}\theta X)\big] - (1 + \mathrm{i}\theta\mathsf{E}[X] - \frac{\theta^2}{2}\mathsf{E}[X^2])\Big| &= \Big|\theta^2\,\mathsf{E}\Big[\int_0^X \Big(\int_0^u (e^{\mathrm{i}\theta v} - 1)\,\mathrm{d}v\Big)\,\mathrm{d}u\Big]\Big| \\ &\leq |\theta|^2\,\mathsf{E}\Big[\int_0^X \Big(\int_0^u |e^{\mathrm{i}\theta v} - 1|\,\mathrm{d}v\Big)\,\mathrm{d}u\Big]. \end{aligned}$$

Merkitsemme

$$R(\theta, x) = \int_0^x \Big(\int_0^u |e^{\mathrm{i}\theta v} - 1|\,\mathrm{d}v\Big)\,\mathrm{d}u.$$

Käyttämällä arvioita $|e^{\mathrm{i}\theta v} - 1| = 2\,|\sin(\theta v/2)| \leq \min\{2, |\theta v|\}$ saamme $R(\theta, x) \leq \min\{x^2, |\theta||x|^3\}$. Erityisesti $0 \leq R(\theta, X) \leq X^2$, joten $R(\theta, X)$ on integroituvan satunnaismuuttujan X^2 dominoima, ja $R(\theta, X) \to 0$ kun $\theta \to 0$, joten dominoidun konvergenssin lauseen perusteella

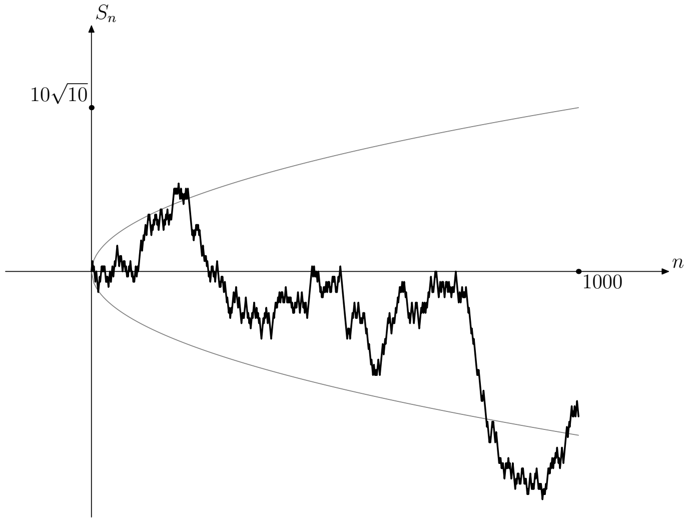
$$\mathsf{E}\big[R(\theta, X)\big] \to 0 \qquad \text{kun } \theta \to 0.$$

Arvion virhe on siis $o(|\theta|^2)$, kuten pitikin. □

4.2.2. *Keskeinen raja-arvolause*

Edellisten aputulosten avulla voimme nyt todistaa keskeisen raja-arvolauseen. Huomautamme, että tämä tulos koskee $(S_n - n\mu)/\sqrt{n}$ jakauman *suppenemista heikosti* (kts. Luku 3) kohti normaalijakaumaa. Heikko suppeneminen on luonnollinen valinta, silloin voimme jopa tarkastella jokaisella n eri todennäköisyysavaruutta, jos $S_n = \sum_{m=1}^n X_{n,m}$. Esimerkiksi melkein varmaa suppenemista emme voi toivoa, koska kuten Kuvassa I.7 hahmotellaan, $n^{-1/2}S_n$ heilahtelee loputtomasti, kun $n \to \infty$.

[11] Esimerkin I.46 ja keskeisen raja-arvolauseen tapauksissa skaalaus on eri, mutta molemmissa se on valittu siten, että rajana saadaan degeneroitumaton jakauma.



KUVA I.7. Kuvassa on satunnaissumma S_n, kun X_k saa arvot ± 1 symmetrisillä todennäköisyyksillä. Summa S_n muuttujan n funktiona heilahtelee suuruusluokassa $\sqrt{n}$ ja siksi ei ole mahdollista toivoa melkein varmaa suppenemista $n^{-1/2}S_n$:lle.

Lause I.66 (Keskeinen raja-arvolause)**.** *Olkoon $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ riippumattomia ja samoin jakautuneita neliöintegroituvia satunnaismuuttujia ja merkitään $\mathsf{E}[X_j] = \mu$ ja* $\mathrm{Var}[X_j] = \sigma^2$. *Olkoon $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Silloin*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{w}} N(0,1) \tag{I.13}$$

missä $N(0,1)$ on standardi normaalijakauma.

Todistus. Kuten Lauseen I.60 todistukessa, voidaan olettaa, että $\mu = 0$.

Satunnaismuuttujan X_j:n karakteristinen funktio toteuttaa Proposition I.65 perusteella

$$\chi(\theta) = \mathsf{E}\big[\exp(\mathrm{i}\theta X_j)\big] = 1 - \frac{\sigma^2\theta^2}{2} + o(\theta^2)$$

ja siten (X_j):n riippumattomuuden avulla satunnaismuuttujan $S_n/(\sigma\sqrt{n})$ karakteristinen funktio on

$$\mathsf{E}\Big[\exp(\mathrm{i}\theta\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}})\Big] = \Big(\chi(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}})\Big)^n = \Big(1 - \frac{\theta^2}{2n} + o(\frac{\theta^2}{\sigma n})\Big)^n \overset{\text{Lemma I.45}}{\longrightarrow} \exp(-\theta^2/2),$$

missä raja on $N(0,1)$-jakautuneen satunnaismuuttujan karakteristinen funktio (kts. Tehtävä I.11). Lauseesta I.41 (tai I.52) päättelemme sitten heikon suppenemisen $S_n/(\sigma\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{w}} N(0,1)$.
□

Tehtävä I.11. Olkoon $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ (normaalijakautunut reaalinen satunnaismuuttuja odotusarvolla $\mu \in \mathbb{R}$ ja varianssilla $\sigma^2 > 0$). Osoita, että X:n karakteristinen funktio $\chi(\theta) = \mathsf{E}\big[e^{\mathrm{i}\theta X}\big]$ on

$$\chi(\theta) = e^{\mathrm{i}\theta\mu - \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2} .$$

Varoitus: Ratkaisu saattaa sisältää kompleksianalyysiä.

Tehtävä I.12. Olkoot $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ ja $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ riippumattomia. Osoita, että $X_1+X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Tehtävä I.13.

(a) Olkoon X_k riippumattomia Poisson-jakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla $\lambda = 1$ ja $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ Osoita, että $(S_n - n)/\sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{w}} N(0,1)$.

(b) Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}.$$

4.2.3. *Muita keskeisen raja-arvolauseen muotoiluja*

Seuraavaa muotoilua keskeiselle raja-arvolauseelle emme todista, mutta se on mielenkiintoinen kahdestakin syystä. Ensinäkin tässä eri satunnaismuuttujat saavat kontribuoida summaan eri verran, koska emme oleta, että satunnaismuuttujat olisivat samoin jakautuneita. Toiseksi mikään summattavista ei saa kontribuoida liikaa summaan. Tämä varmistetaan lauseen toisella ehdolla, jota kutsutaan *Lindebergin ehdoksi* suomalaisen matemaatikon Jarl Waldemar Lindeberg (1876–1932) mukaan.

Lause I.67 (Lindeberg–Feller). *Olkoon* $(X_{n,m})$, $1 \le m \le n$ *jokaisella* n *riippumattomia siten, että* $\mathsf{E}[X_{n,m}] = 0$. *Oletetaan, että*

(1) $\sum_{m=1}^n \mathsf{E}[X_{n,m}^2] \to \sigma^2 > 0$, *kun* $n \to \infty$, *ja*
(2) *kaikilla* $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^n \mathsf{E}[X_{n,m}^2 \, \mathbb{1}_{X_{n,m} > \varepsilon}] = 0$.

Silloin $S_n = \sum_{m=1}^n X_{n,m} \xrightarrow{\mathrm{w}} N(0,\sigma^2)$, *kun* $n \to \infty$.