3. Heikko konvergenssi

3.1. Reaalisten satunnaismuuttujien heikko suppeneminen

Todennäköisyysmittojen heikko suppeneminen (eli heikko konvergenssi) on statistisessa fysiikassa luonnollinen konvergenssin käsite, jonka avulla termodynaaminen raja saadaan määriteltyä matemaattisesti huolellisesti ja filosofisesti oikein. Käsittelemme ensin tällä luennolla konkretian vuoksi todennäköisyysmittoja reaaliakselilla $\mathbb{R}$. Myöhemmin kurssilla tarvitsemme heikkoa suppenemista yleisemmillä avaruuksilla, nimittäin täydellisillä separoituvilla metrisillä avaruuksilla, jollaisilla statistisen mekaniikan mallit useimmiten on määritelty.

Todennäköisyysmitta reaaliakselilla on siis todennäköisyysavaruus $(\mathbb{R}, \nu, \mathcal{B})$ — perusjoukko on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$, sigma-algebra $\mathcal{B}$ koostuu $\mathbb{R}$:n Borel osajoukoista (pienin sigma-algebra joka sisältää reaaliakselin avoimet välit), ja todennäköisyysmittaa merkitsemme tässä luvussa yleensä ν:llä. Korostamme heti, että jos $(\Omega, \mathsf{P}, \mathcal{F})$ on todennäköisyysavaruus ja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sillä määritelty reaaliarvoinen satunnaismuuttuja, niin X:n jakauma ν_X on todennäköisyysmitta reaaliakselilla, $\nu_X(B) = \mathsf{P}[X \in B]$ kaikilla $B \in \mathcal{B}$. Puhumme usein reaaliarvoisten satunnaismuuttujien heikosta suppenemisesta, jolla tarkoitamme täsmälleen näiden satunnaismuuttujien jakaumien heikkoa suppenemista mittoina $\mathbb{R}$:llä.

3.1.1. *Heikon suppenemisen idea ja määritelmä*

Statistisessa fysiikassa heikon suppenemisen idea on, että mikä tahansa systeemeistä mitattavissa oleva asia suppenee. Idealisoimme tätä niin, että mitattavia asioita ovat riittävän hyvin käyttäytyvien satunnaismuuttujien odotusarvot. Huomautetaan vielä, että esimerkiksi satunnaismuuttujien varianssit ja tapahtumien todennäköisyydet voidaan lausua sopivasti valittujen satunnaismuuttujien odotusarvojen avulla, joten idealisaatiomme yleensä kattaa myös niiden konvergenssin. Idealisaatiossamme satunnaismuuttuja on riittävän hyvin käyttäytyvä, jos se on jatkuva ja rajoitettu (näillä taataan erityisesti mitallisuus ja odotusarvon olemassaolo).

Määritelmä I.38. Sanomme, että jono $(\nu_n)_{n=1}^\infty$ todennäköisyysmittoja $\mathbb{R}$:llä suppenee heikosti kohti todennäköisyysmittaa ν_∞ jos kaikilla jatkuvilla rajoitetuilla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee

$$\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\nu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\nu_\infty. \tag{I.11}$$

Tällöin merkitsemme $\nu_n \overset{\mathrm{w}}{\to} \nu_\infty$.

Huomautus I.39. Määritelmän ehto (I.11) karakterisoi yksikäsitteisesti raja-arvon, eli Borel-todennäköisyysmitan ν_∞ (tämä seuraa alempana esitetystä Lauseesta I.41, katso myös Tehtävä I.7).

Huomautus I.40. Jos $(X_n)_{n=1}^\infty$ on jono satunnaismuuttujia $X_n \sim \nu_n$ ja $X_\infty \sim \nu_\infty$, merkitsemme myös $X_n \overset{\mathrm{w}}{\to} X_\infty$. Tämä tarkoittaa siis, että kaikilla jatkuvilla rajoitetuilla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odotusarvot suppenevat

$$\mathsf{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathsf{E}[f(X_\infty)].$$

Määritelmä on mielekäs, vaikka satunnaismuuttujat X_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, eivät olisi samalla todennäköisyysavaruudella määriteltyjä — voimme hyvin sallia tn-avaruuksiksi $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathsf{P}_n)$ ja $X_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$ (jolloin parempi notaatio odotusarvoille olisi myös $\mathsf{E}_n[f(X_n)] \to \mathsf{E}_\infty[f(X_\infty)]$).

Funktionaalianalyysissä lokaalisti äärellisten mittojen heikko konvergenssi[5] määriteltäisiin niin, että ehdossa (I.11) vaaditaan testifunktiot f jatkuviksi ja lisäksi kompaktikantajaisiksi.[6] Tällä määritelmällä rajamitta ν_∞ ei automaattisesti olisi todennäköisyysmitta — todennäköisyysmassaa voisi "karata äärettömyyteen", koska $\mathbb{R}$ ei ole kompakti. Esimerkkeinä tällaisesta karkaamisesta toimivat $\nu_n = \delta_{x_n}$ missä $x_n \to \infty$ tai $\nu_n = \mathrm{Tas}([-n, n])$ tai vaikkapa normaalijakautuneet satunnaismuuttujat rajatta kasvavalla varianssilla — kaikki näistä suppenevat heikosti kohti nollamittaa funktionaalianalyysin mielessä. Meidän määritelmällämme nämä jonot eivät suppene heikosti. Todennäköisyysmittajonojen "tiukkuus", johon törmäämme tällä kurssilla jatkossa usein, on ehto, joka takaa ettei mitoilta karkaa massaa.

Toisin kuin esimerkiksi melkein varman suppenemisen tapauksessa, puhuessamme satunnaismuuttujien X_n heikosta suppenemisesta, näiden satunnaismuuttujien ei tarvitse olla samalla todennäköisyysavaruudella määriteltyjä — voimme joka tapauksessa tarkastella niiden jakaumia ja jakaumien suppenemista. Tämä on itseasiassa melko luonnollista statistisessa fysiikassa: todellisessa fysikaalisessa systeemissä on suuri mutta äärellinen määrä mikroskooppisia osasia, esim. $n_{\text{fys}} = 10^{23}$. Jos ν_n kuvaa jakaumaa n:n osasen mallisysteemissä ja meillä on mallin termodynaamista rajaa koskeva tulos $\nu_n \overset{\mathrm{w}}{\to} \nu_\infty$, niin voimme sanoa, että suureiden odotusarvoja fysikaalisen systeemin jakaumassa $\nu_{n_{\text{fys}}}$ voidaan approksimoida hyvin odotusarvoilla rajamitassa ν_∞. Karkeasti sanottuna silloin ei ole suurta väliä onko fysikaalisessa systeemissämme tasan 10^{23} vapausastetta vai mahdollisesti muutama enemmän tai vähemmän.

3.1.2. *Ekvivalentteja ehtoja heikolle suppenemiselle*

Alla annamme erilaisia yhtäpitäviä määritelmiä reaalisten satunnaismuuttujien heikolle suppenemiselle. Käytännön esimerkeissä heikko konvergenssi tarkistetaan usein toisella tai kolmannella karakterisaatiolla, kertymäfunktion tai karakteristisen funktion avulla.

Lause I.41. *Olkoot ν_n, $n \in \mathbb{N}$, ja ν tn-mittoja $\mathbb{R}$:llä, F_n ja F vastaavat kertymäfunktiot $\mathbb{R} \to [0,1]$, ja χ_n ja χ vastaavat karakteristiset funktiot $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) *Todennäköisyysmittajono suppenee heikosti*

$$\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{w}} \nu.$$

(ii) *Kertymäfunktiot suppenevat pisteittäin*

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x) \qquad \textit{kaikissa kertymäfunktion } F \textit{ jatkuvuuspisteissä } x.$$

(iii) *Karakteristiset funktiot suppenevat pisteittäin*

$$\chi_n(\theta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \chi(\theta) \qquad \textit{kaikilla } \theta \in \mathbb{R}.$$

(iv) *Kaikilla avoimilla $U \subset \mathbb{R}$ pätee $\nu(U) \leq \liminf_{n\to\infty} \nu_n(U)$.*
(v) *Kaikilla suljetuilla $F \subset \mathbb{R}$ pätee $\nu(F) \geq \limsup_{n\to\infty} \nu_n(F)$.*
(vi) *Kaikilla Borel joukoilla $B \subset \mathbb{R}$, joille $\nu[\partial B] = 0$, pätee $\nu_n(B) \to \nu(B)$.*

[5] Funktionaalianalyysissä käytettäisiin mahdollisesti termiä "heikko-tähti konvergenssi".
[6] Integraalit eivät muuten välttämättä olisikaan äärellisiä.

Huomautus I.42. Alla esitetty ehtojen yhtäpitävyystodistus noudattaa seuraavaa karttaa:

$$
\begin{tikzcd}
\text{(i)} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dd, leftrightarrow, dotted, "\text{Lause I.52}"'] & \text{(v)} \arrow[dd, leftrightarrow] \arrow[dr, squiggly, dash] & & \\
& & \text{(iv)\&(v)} \arrow[r] & \text{(vi)} \arrow[dl] \\
\text{(iii)} & \text{(iv)} \arrow[ur, squiggly, dash] & \text{(ii)} \arrow[l] &
\end{tikzcd}
$$

Todistus. Ehdot (iv) ja (v) nähdään yhtäpitäviksi komplementtijoukkoja tarkastelemalla.

Implikaatio (iv)&(v) $\Rightarrow$ (vi) nähdään seuraavasti. Olkoon $B \subset \mathbb{R}$ Borel-joukko. Merkitään sen sulkeumaa $\overline{B}$ ja sisusta $B^\circ = \mathbb{R} \setminus \overline{(\mathbb{R} \setminus B)}$, jolloin $\partial B = \overline{B} \setminus B^\circ$. Koska $B^\circ \subset B \subset \overline{B}$, ehto $\nu[\partial B] = 0$ takaa, että $\nu[B^\circ] = \nu[B] = \nu[\overline{B}]$. Sisus on avoin ja sulkeuma suljettu, joten käyttämällä oletuksia (iv) ja (v) sekä tavanomaista mittojen monotonisuutta, saamme

$$\liminf \nu_n[B] \geq \liminf \nu_n[B^\circ] \geq \nu[B^\circ] = \nu[B] = \nu[\overline{B}] \geq \limsup \nu_n[\overline{B}] \geq \limsup \nu_n[B].$$

Haluttu raja-arvo (vi) seuraa nästä epäyhtälöistä.

Implikaatio (vi) $\Rightarrow$ (ii) on helppo: puoliäärettömän välin $(-\infty, x]$ reuna on $\partial(-\infty, x] = \{x\}$, ja x on kertymäfunktion F jatkuvuuspiste jos ja vain jos $\nu[\{x\}] = 0$ — siis tässä tapauksessa olettamalla (vi) saamme

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \nu_n\big[(-\infty, x]\big] = \nu\big[(-\infty, x]\big] = F(x).$$

Implikaatio (ii) $\Rightarrow$ (iv) näytetään seuraavasti. Oletetaan ensin, että $U = (a, b)$ on avoin väli. Kaikilla $\varepsilon > 0$ on silloin olemassa funktion F jatkuvuuspisteet a', b' siten, että $a < a' < b' < b$ ja $\nu[(a, b)] \leq \nu[(a', b')] + \varepsilon$ (epäjatkuvuuspisteitä on korkeintaan numeroituvan monta, joten jatkuvuuspisteet ovat tiheässä). Toisaalta

$$\nu[(a', b')] \leq \Big(F(b') - F(a')\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(F_n(b') - F_n(a')\Big) = \lim_{n\to\infty} \nu_n[(a', b']] \leq \liminf_{n\to\infty} \nu_n[(a, b)].$$

Yhdistämällä ylläolevat, saadaan $\nu[(a, b)] \leq \varepsilon + \liminf_{n\to\infty} \nu_n[(a, b)]$. Yleisessä tapauksessa avoin joukko $U \subset \mathbb{R}$ on yhdiste korkeintaan numeroituvan monesta erillisestä avoimesta välistä, $U = \bigcup_{j=1}^\infty (a_j, b_j)$ (oletamme tässä, että tarvitaan numeroituvasti ääretön yhdiste, äärellinen tapaus on helppo). Kiinnitetyllä ε, yhtä väliä varten käytetyllä menetelmällä näytetään, että kaikilla j pätee $\nu[(a_j, b_j)] \leq 2^{-j}\varepsilon + \liminf_{n\to\infty} \nu_n[(a_j, b_j)]$. Välien yhdisteelle U saamme additiivisuutta (P-ii) ja Fatoun lemmaa (Lemma I.23) käyttäen

$$\begin{aligned}
\nu[U] = \sum_{j=1}^\infty \nu[(a_j, b_j)] &\leq \sum_{j=1}^\infty \Big(2^{-j}\varepsilon + \liminf_{n\to\infty} \nu_n[(a_j, b_j)]\Big) \\
&\leq \varepsilon + \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=1}^\infty \nu_n[(a_j, b_j)] = \varepsilon + \liminf_{n\to\infty} \nu_n[U],
\end{aligned}$$

Väite seuraa tästä, koska $\varepsilon > 0$ voidaan valita mielivaltaisen pieneksi.

Todistamme sitten, että (i) $\Rightarrow$ (v). Olkoon $F \subset \mathbb{R}$ suljettu ja epätyhjä. Funktio $x \mapsto d(x, F) = \inf_{y\in F} |x - y|$ on jatkuva epänegatiivinen funktio $\mathbb{R}$:llä, ja $d(x, F) = 0$ jos ja vain jos $x \in F$. Asetetaan kaikilla $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 - \frac{d(x,F)}{\varepsilon} & \text{jos } d(x, F) \leq \varepsilon \\ 0 & \text{jos } d(x, F) > \varepsilon. \end{cases}$$

Silloin $f_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ on jatkuva ja rajoitettu, ja

$$\mathbb{1}_F \leq f_\varepsilon \leq \mathbb{1}_{F_\varepsilon},$$

missä $F_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} \ : \ d(x, F) \leq \varepsilon\}$ on joukon F ε-paksunnos. Siksi pätee

$$\nu_n(F) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_F \, d\nu_n \leq \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon \, d\nu_n \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{F_\varepsilon} \, d\nu_n = \nu_n(F_\varepsilon)$$

Ehdossa (v) esiintyvää lauseketta arvioimme samoin seuraavasti,

$$\limsup_{n\to\infty} \nu_n(F) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon \, \mathrm{d}\nu_n \overset{\text{(i)}}{=} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon \, \mathrm{d}\nu \leq \nu(F_\varepsilon).$$

Toisaalta, $F_\varepsilon \downarrow F$ kun $\varepsilon \searrow 0$, joten rajalla $\varepsilon \searrow 0$ epäyhtälön oikea puoli antaa $\nu(F_\varepsilon) \searrow \nu(F)$, ja saamme halutun ylärajan.

Sitten todistamme päinvastaisen implikaation, (v) $\Rightarrow$ (i). Heikon konvergenssin ehdossa (I.11) voimme olettaa yleisyyttä rajoittamatta, että $0 < f < 1$, koska vakion lisääminen tai nollasta eroavalla vakiolla kertominen ei muuta ehdon paikkaansapitävyyttä. Kiinnitämme väliaikaisesti positiivisen kokonaisluvun N, ja määrittelemme joukot

$$F_i = \left\{ x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \frac{i}{N} \right\}, \qquad \text{kun } i = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Funktion f jatkuvuuden perusteella F_i on suljettu, ja voimme arvioida funktiota f ylhäältä ja alhaalta yksinkertaisilla funktioilla

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{i-1}{N} \mathbb{1}_{F_{i-1} \setminus F_i} \leq f \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{i}{N} \mathbb{1}_{F_{i-1} \setminus F_i}.$$

Integroimalla kohti mittaa ν saamme tästä epäyhtälöstä seuraavan,

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{i-1}{N} \nu[F_{i-1} \setminus F_i] \leq \int f \, \mathrm{d}\nu \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{i}{N} \nu[F_{i-1} \setminus F_i].$$

Koska jonon joukot ovat sisäkkäisiä, $F_i \subset F_{i-1}$, pätee $\nu[F_{i-1} \setminus F_i] = \nu[F_{i-1}] - \nu[F_i]$. Tätä käyttäen, avaamalla teleskooppisummat, epäyhtälön vasen ja oikea puoli voidaan kirjoittaa seuraavissa muodoissa

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \nu[F_i] \leq \int f \, \mathrm{d}\nu \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \nu[F_i].$$

Vastaavat epäyhtälöt pätevät tietenkin myös, jos mitta ν korvataan mitalla ν_n. Oletuksen (v) nojalla sitten

$$-\frac{1}{N} + \limsup_{n\to\infty} \int f \, \mathrm{d}\nu_n \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \nu_n[F_i] \overset{\text{(v)}}{\leq} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \nu[F_i] \leq \int f \, \mathrm{d}\nu.$$

Ottamalla rajan $N \to \infty$ saamme

$$\limsup_{n\to\infty} \int f \, \mathrm{d}\nu_n \leq \int f \, \mathrm{d}\nu.$$

Soveltamalla tätä funktioon $1 - f$, saamme myös

$$\liminf_{n\to\infty} \int f \, \mathrm{d}\nu_n \geq \int f \, \mathrm{d}\nu.$$

Näistä seuraa yhtälö (I.11), ja näemme ehdon (i) myös seuraavan ehdosta (v).

Lukuunottamatta ehtoa (iii), olemme näyttäneet lauseen ehdot yhtäpitäviksi. Implikaatiot (i) $\Rightarrow$ (iii) ja (iii) $\Rightarrow$ (i) osoitetaan myöhemmin vielä käytännöllisemmässä muodossa Lauseessa I.52. □

3.1.3. *Esimerkkejä heikosta suppenemisesta*

Tarkastelemme nyt joitakin esimerkkejä reaaliarvoisten satunnaismuuttujien heikosta suppenemisesta.

Esimerkki I.43 (Pistemassojen heikko suppeneminen)**.** Jos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on reaalilukujono, niin pistemassat $\nu_n = \delta_{x_n}$ suppenevat heikosti jos ja vain jos lukujono suppenee, $x_n \to x$. Silloin $\delta_{x_n} \overset{\mathrm{w}}{\to} \delta_x$.

Esimerkki I.44 (Jakaumien jatkuvuus parametreissa)**.** Useat todennäköisyysjakaumat, joissa esiintyy jatkuvia parametreja, riippuvat jatkuvasti parametreistä. Seuraavassa on joitakin esimerkkejä:

- Jos $X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda_n)$ ja $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}_+$, niin $X_n \overset{\mathrm{w}}{\to} X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.
- Jos $X_n \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ ja $\mu_n \to \mu$, $\sigma_n \to \sigma \in \mathbb{R}_+$, niin $X_n \overset{\mathrm{w}}{\to} X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Jos $X_n \sim \mathrm{Bin}(N; p_n)$ ja $p_n \to p \in [0,1]$, niin $X_n \overset{\mathrm{w}}{\to} X \sim \mathrm{Bin}(N; p)$.

Kaikki ylläolevat nähdään helposti Lauseen I.41 kertymäfunktiota koskevan ehdon (ii) avulla. Vaihtoehtoisesti, esimerkiksi viimeinen ylläolevista nähdään myös helposti Lauseen I.41 tapahtumien todennäköisyyksiä koskevan ehdon (vi) perusteella.

Seuraavissa esimerkeissä ja usein jatkossakin tarvitsemme aputuloksena alla olevaa eksponenttifunktion approksimaatiota.

Lemma I.45. *Olkoon $c_n, c \in \mathbb{C}$. Jos $c_n \to c$, niin $(1 + c_n/n)^n \to e^c$.*

Todistus. Kirjoitetaan ensiksi millä tahansa $b \in \mathbb{C}$ jolle $|b| \le 1$

$$|e^b - (1+b)| = \left| \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \ldots \right| \le |b|^2 \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \right) \le |b|^2$$

ja mille tahansa $z, w \in \mathbb{C}$ jolle $|z|, |w| \le M$

$$|z^n - w^n| = |z - w| \left| z^{n-1} + z^{n-2}w + \ldots zw^{n-2} + w^{n-1} \right| \le M^{n-1}(n-1)|z - w|$$

Olkoon nyt $z = (1 + c_n/n)$, $w = e^{c_n/n}$ ja $\gamma > |c|$. Riittävän isolla n, $|z|, |w| \le e^{\gamma/n}$ ja siispä

$$|(1 + c_n/n)^n - e^{c_n}| \le (e^{\gamma/n})^{n-1}(n-1)|1 + c_n/n - e^{c_n/n}| \le e^{\gamma} \frac{\gamma^2}{n} \to 0$$

kun $n \to \infty$. □

Esimerkki I.46 (Binomijakauman Poisson approksimaatio)**.** Binomijakautuneen satunnaismuuttujan $B \sim \mathrm{Bin}(N; p)$ jakauma ja karakteristinen funktio ovat

$$\mathsf{P}[B = k] = p^k (1-p)^{N-k} \frac{N!}{k!(N-k)!}, \qquad \chi_B(\theta) = \mathsf{E}[e^{\mathrm{i}\theta B}] = (1 - p + e^{\mathrm{i}\theta} p)^N.$$

Pienellä p ja suurella N binomijakauma käyttäytyy oleellisesti kuten Poisson jakautuma. Jos $X_n \sim \mathrm{Bin}(n; p_n)$, missä $np_n \to \lambda \in \mathbb{R}_+$, niin Lemman I.45 perusteella

$$\chi_{X_n}(\theta) = \left(1 - p_n + e^{\mathrm{i}\theta} p_n\right)^n = \left(1 + \frac{np_n(e^{\mathrm{i}\theta} - 1)}{n}\right)^n \longrightarrow \exp\left(\lambda(e^{\mathrm{i}\theta} - 1)\right).$$

Tämä on Poisson-jakautuneen satunnaismuuttujan $P \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ karakteristinen funktio,

$$\mathsf{P}[P = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \chi_P(\theta) = \mathsf{E}[e^{\mathrm{i}\theta P}] = e^{-\lambda} \exp\left(\lambda e^{\mathrm{i}\theta}\right).$$

Lauseen I.41 karakteristisia funktioita koskevan ehdon (iii) nojalla nähdään siis, että $X_n \overset{\mathrm{w}}{\to} X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$.

Esimerkki I.47 (Aiempi MergeSort algoritmiin liittyvä esimerkki)**.** Tehtävässä I.3 tarkasteltiin satunnaismuuttujaa $S_m^{(n)}$, joka esiintyy MergeSort järjestysalgoritmin vertailujen lukumäärässä: $S_m^{(n)}$ ilmaisee kuinka monta ensimmäistä alkiota kuuluu satunnaisessa n alkion järjestyksessä m ensimmäisen alkion joukkoon. Todettiin myös, että jos $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on jono, jolle $\frac{m_n}{n} \to r$ kun $n \to \infty$, niin

$$\mathsf{P}\big[S_{m_n}^{(n)} = s\big] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1-r)r^s.$$

Tästä seuraa, Lauseen I.41 tapahtumien todennäköisyyksiä koskevan ehdon (vi) nojalla, että satunnaismuuttujajono $\big(S^{(n)}_{m_n}\big)$ suppenee heikosti kohti geometrisesti jakautunutta satunnaismuuttujaa

$$S^{(n)}_{m_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathrm{Geom}(r).$$

Esimerkki I.48 (Tasajakautuneiden riippumattomien satunnaismuuttujien minimi)**.** Olkoot $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on riippumattomia ja samoin jakautuneita $T_n \sim \mathrm{Tas}([0,1])$. Tarkastellaan satunnaismuuttujien minimiä ja $\min_{1\leq k\leq n}(T_k)$. Voimme laskea minimin kertymäfunktion pisteessä $x \in [0,1]$ riippumattomuutta käyttäen

$$1 - \mathsf{P}\left[\min_{1\leq k\leq n}(T_k) > x\right] = 1 - \mathsf{P}\left[T_k > x \;\forall k \leq n\right] = 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}[T_k > x] = 1 - (1-x)^n.$$

Minimi suppenee kohti pistemassaa $\min_{1\leq k\leq n}(T_k) \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$. Kiinnostavampaa on uudelleennormalisoida minimi, ja tarkastella satunnaismuuttujajonoa $X_n = n \times \min_{1\leq k\leq n}(T_k)$. Satunnaismuuttujien X_n kertymäfunktiot suppenevat: kun $0 \leq x \leq n$ laskemme

$$1 - \mathsf{P}[X_n > x] = 1 - \mathsf{P}\left[\min_{1\leq k\leq n}(T_k) > \frac{x}{n}\right] = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-x},$$

ja näin Lauseen I.41 kertymäfunktioita koskevan ehdon (ii) avulla toteamme, että uudelleennormalisoidut minimit suppenevat heikosti kohti eksponenttijakautunutta satunnaismuuttujaa

$$X_n = n \times \min_{1\leq k\leq n}(T_k) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathrm{w}}} X \sim \mathrm{Exp}(1).$$

Tehtävä I.6 (Eksponenttijakautuneiden riippumattomien satunnaismuuttujien maksimi)**.** Olkoot satunnaismuuttujat X_j, $j \in \mathbb{N}$, riippumattomia ja samoin jakautuneita, $X_j \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Merkitään näistä n ensimmäisen maksimia

$$M_n = \max_{1\leq j\leq n} X_j,$$

ja tarkastellaan siirrettyä maksimia

$$R_n = M_n - \log(n).$$

Osoita, että satunnaismuuttujajono $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee heikosti, ja laske rajajakauman kertymäfunktio.

Seuraavan harjoitustehtävän tulos näyttää, että heikon konvergenssin topologia on metristyvä.

Tehtävä I.7. Kun F ja G ovat kaksi kertymäfunktiota, asetetaan

$$d(F,G) \;=\; \inf\left\{\varepsilon > 0 \;\middle|\; \forall x \in \mathbb{R}\;: F(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x+\varepsilon) + \varepsilon\right\}.$$

Osoita, että d on metriikka kertymäfunktioiden joukolla, eli

$$d(F,G) \geq 0 \quad \forall F,G \qquad \text{ja} \qquad d(F,G) = 0 \Leftrightarrow F = G \tag{i}$$

$$d(F,G) = d(G,F) \qquad \forall F,G \tag{ii}$$

$$d(F,H) \leq d(F,G) + d(G,H) \qquad \forall F,G,H. \tag{iii}$$

Osoita lisäksi, että kertymäfunktiojono (F_n) suppenee heikosti kohti kertymäfunktiota F jos ja vain jos $d(F_n,F) \to 0$.