Osa I

Todennäköisyysteoriaa

1. Äärellisiä todennäköisyysavaruuksia

1.1. Todennäköisyysmitta äärellisellä joukolla

Ennen siirtymistä yleisempään tapaukseen, palautetaan mieliin diskreettiä todennäköisyyslaskentaa. Koostukoon siis *perusjoukko* eli *alkeistapahtumien* joukko Ω äärellisen monesta alkiosta, $\#\Omega < \infty$. *Tapahtumat* ovat perusjoukon osajoukkoja

$$E \subset \Omega,$$

eli erilaisia alkeistapahtumien kokoelmia. Voimme sallia tapahtumiksi kaikki mahdolliset osajoukot, joten sigma-algebramme $\mathcal{F}$ on Ω:n potenssijoukko $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. *Todennäköisyysmitta* on additiivinen joukkofunktio Ω:lla

$$\mathsf{P}\colon\ \mathcal{F} \to [0,1],$$

joka tässä tapauksessa on helpointa määritellä luettelemalla kaikkien alkeistapahtumien todennäköisyydet

$$p_\omega = \mathsf{P}\left[\{\omega\}\right], \qquad \omega \in \Omega,$$

joiden tulee toteuttaa

$$0 \le p_\omega \le 1 \qquad \forall \omega \in \Omega \tag{I.1}$$

$$\text{ja} \qquad \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1. \tag{I.2}$$

Yleisen tapahtuman $E \subset \Omega$ todennäköisyys on

$$\mathsf{P}[E] = \sum_{\omega \in E} p_\omega.$$

Esimerkki I.1 (Binomijakauma)**.** Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $q \in [0,1]$ parametri. *Binomijakauma* on se tn-mitta joukolla

$$\Omega = [\![0,n]\!] := \{0,1,2,\ldots,n\},$$

jolle yksiöiden todennäköisyydet ovat

$$p_j = q^j (1-q)^{n-j} \binom{n}{j} \qquad j \in \Omega, \tag{I.3}$$

missä

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(1 \cdot 2 \cdots j)\,(1 \cdot 2 \cdots (n-j))}$$

ovat *binomikertoimet*.

Selvästi pätee $p_j \ge 0$, ja asettamalla $a = q$, $b = 1-q$ binomikaavassa

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

päättelemme, että $\sum_{j=0}^{n} p_j = 1$. Ominaisuudet (I.1) ja (I.2) ovat siis tosiaan voimassa.

Jos satunnaismuuttujan X jakauma on binomijakauma parametreilla n, q kuten yllä, merkitsemme $X \sim \mathrm{Bin}(n, q)$. Muistutamme, että odotusarvo $\mathsf{E}[X] = nq$ ja varianssi $\mathsf{Var}[X] = nq(1-q)$ saadaan tällöin helpoilla laskuilla.[1]

Useat satunnaismuuttujat myös tällä kurssilla noudattavat oleellisesti binomijakaumaa, mm.

- kaasuhiukkasten lukumäärä yhdellä puolella kaksiosaista säiliötä stationaarisessa tilassa (kts. seuraava esimerkki)
- yksinkertaisen yksiulotteisen satunnaiskävelyn paikka annetulla ajanhetkellä
- avoimien särmien/pisteiden lukumäärä perkolaatiossa

Esimerkki I.2 (Ehrenfestin uurna)**.** Edelliseen esimerkkiin liittyen, tarkastelemme seuraavaa hyvin yksinkertaista fysikaalista mallia, joka tunnetaan nimellä Ehrenfestin uurna, ja joka esiteltiin yksinkertaiseksi selitykseksi termodynamiikan toiselle pääsäännölle (palaamme tähän myöhemmin).

Ajatellaan kaasusäiliötä, jossa on kaksi toisiinsa yhteydessä olevaa osaa A ja B, ja yhteensä N hiukkasta, joista jokainen on jommassa kummassa osassa. Oletetaan, systeemille dynamiikka, jossa (vaikkapa tasaisin väliajoin) umpimähkään valitaan hiukkanen, joka todennäköisyydellä q siirretään osaan A, muutoin osaan B. Jos osassa A olevien hiukkasten lukumäärä on N_A, valittu hiukkanen otetaan osista A ja B vastaavasti todennäköisyyksillä $\frac{N_A}{N}$ ja $\frac{N-N_A}{N}$. Dynaamisessa askeleessa osassa A olevien hiukkasten lukumäärä voi vähetä yhdellä, mikä tapahtuu jos osasta A valittu hiukkanen siirretään osaan B, eli todennäköisyydellä $(1-q)\frac{N_A}{N}$, tai kasvaa yhdellä, mikä tapahtuu jos osasta A valittu hiukkanen siirretään osaan B, eli todennäköisyydellä $q\frac{N-N_A}{N}$, tai pysyä samana, mikä tapahtuu muussa tapauksessa.

Systeemin stationaarisessa jakaumassa osassa A olevien hiukkasten lukumäärä N_A noudattaa binomijakaumaa, $N_A \sim \mathrm{Bin}(N, q)$. Osassa A olevien hiukkasten osuus $\rho_A = \frac{N_A}{N}$ on satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo on $\mathsf{E}[\rho_A] = q$ ja varianssi $\mathsf{Var}[\rho_A] = \frac{q(1-q)}{N}$. Varianssi menee nollaan hiukkasten lukumäärän kasvaessa, $N \to \infty$, ja alunperin satunnaisesta tiheyden kaltaisesta suureesta ρ_A tulee rajalla deterministinen. Tätä voidaan pitää leikkikaluesimerkkinä siitä, miten deterministiset termodynaamiset lait seuraavat statistisen fysiikan mikroskooppisen tason satunnaisuudesta "termodynaamisella rajalla". Kuva I.1 havainnollistaa tätä varianssin pienenemistä N:n kasvaessa.

Tehtävä I.1. Tarkastellaan Ehrenfestin uurnaa parametrilla q ja hiukkasten kokonaismäärällä N — tässä tehtävässä lasketaan sen stationaarinen jakauma.

Satunnaismuuttujan N_A jakaumaa merkitään $\mathsf{P}[N_A = n] = p_n$, missä $p_n = 0$ jos $n \notin [\![0, N]\!]$. Yhden dynaamisen askeleen jälkeen vastaava satunnaismuuttuja on N_A', jonka jakauma siis on

$$\mathsf{P}[N_A' = n] = q\frac{N-n+1}{N}p_{n-1} + (1-q)\frac{n+1}{N}p_{n+1} + \left(1 - q\frac{N-n}{N} - (1-q)\frac{n}{N}\right)p_n.$$

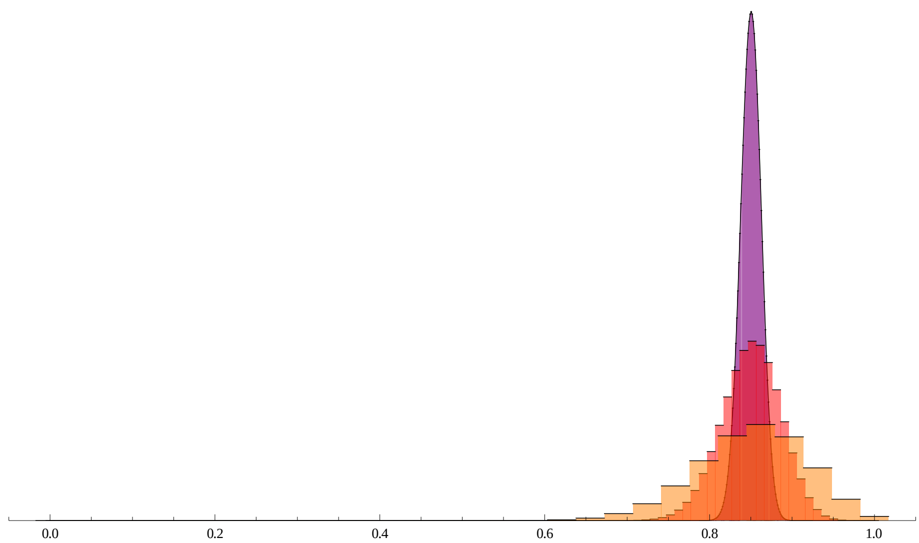
Osoita, että satunnaismuuttujien N_A ja N_A' jakaumat ovat samat eli $\mathsf{P}[N_A = n] = \mathsf{P}[N_A' = n]$ kaikilla n, jos ja vain jos

$$p_n = \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n}$$

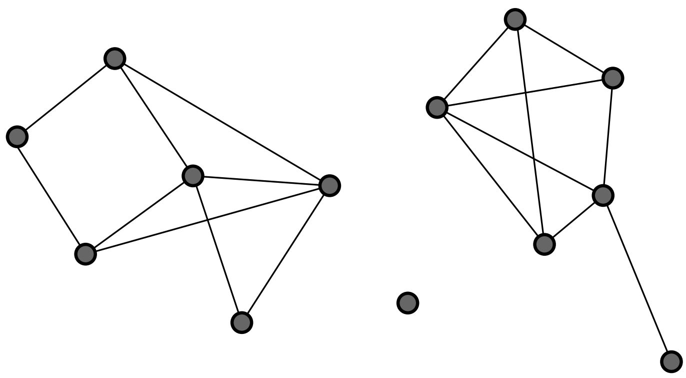
eli $N_A \sim \mathrm{Bin}(N, q)$.

Esimerkki I.3 (Eräs jakauma äärellisen graafin pisteillä)**.** Olkoon $G = (V, E)$ äärellinen graafi: V on graafin pisteiden äärellinen joukko, ja E graafin viivojen joukko, katso Kuva I.2. Oletamme, että $E \neq \emptyset$.

[1] Binomijakautuneen satunnaismuuttujan X odotusarvon ja varianssin voi johtaa vaikkapa. binomikaavasta lähtien, mutta paras tapa on ymmärtää X riippumattomien $\{0,1\}$-arvoisten termien summana.



Kuva I.1. Satunnaisen tiheyden $\rho_A = \frac{N_A}{N}$ jakauma Ehrenfestin uurnan stationaarisessa jakaumassa parametreilla $q = 0.85$ sekä $N = 29$, $N = 101$, $N = 809$. Termodynaamisella rajalla, eli kun $N \to \infty$, satunnainen tiheys keskittyy yhä tarkemmin arvoon q.



Kuva I.2. Graafi $G = (V, E)$ koostuu pisteistä eli kärjistä, joiden joukko on V, sekä niitä yhdistävistä viivoista eli särmistä, joiden joukko on E on jokin kokoelma järjestämättömiä pareja V:n alkioista. Pisteen $v \in V$ aste $\deg(v)$ on niiden viivojen lukumäärä, joihin v kuuluu, $\deg(v) = \#\{e \in E : v \in e\}$.

Voimme määritellä todennäköisyysmitan graafin pisteiden joukolla $\Omega = V$ esimerkiksi asettamalla yksiöiden todennäköisyyksiksi

$$p_v = \frac{\deg(v)}{2\,|E|} \qquad v \in V.$$

Jälleen selvästi pätee $0 \leq p_v \leq 1$, ja kaavasta $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\,|E|$ (jokainen viiva tulee lasketuksi kahdesti asteiden summassa, koska täsmälleen kaksi pistettä kuuluu samaan viivaan) saamme myös oikean todennäköisyyksien summan $\sum_{v \in V} p_v = 1$. Toisin sanoen, ominaisuudet (I.1) ja (I.2) ovat tässäkin tapauksessa voimassa.

Palaamme tähän myöhemminkin, sillä yllä määritelty todennäköisyysmitta on graafin G yksinkertaisen satunnaiskävelyn stationaarinen jakauma.

Itseasiassa useimmat statistisen fysiikan mallit määritellään (aluksi) todennäköisyysmittoina äärellisellä joukolla. Joukoissa on kuitenkin jokin luonteva kokoparametri — tyypillisesti systeemin mikroskoopposten osasten äärellinen, mutta suuri lukumäärä N. Lopulta olemme kiinnostuneita termodynaamisesta rajasta $N \to \infty$: pyrimme näyttämään, että todennäköisyysmitat suppenevat heikosti (kts. Luku 3) ja ymmärtämään rajalla saadun todennäköisyysmitan ominaisuuksia. Mainitsemme tässä jo yhden tärkeän fysikaalisen esimerkin, ferromagnetismin Isingin mallin, johon liittyvään matematiikkaan ja fysiikkaan palaamme vielä useaan kertaan tällä kurssilla.

Esimerkki I.4 (Isingin malli)**.** Olkoon $G = (V, E)$ äärellinen graafi. Isingin malli (kts. tarkemmin mm. Osan II Luvut 1 ja 3 sekä Osa IV) graafilla G on todennäköisyysmitta joukolla

$$\Omega = \{-1, +1\}^V ,$$

eli ± 1-arvoisten graafin pisteillä määriteltyjen funktioiden joukossa. Joukko Ω on äärellinen, nimittäin $\#\Omega = 2^{\#V}$. Konfiguraation $\omega = (\omega_v)_{v \in V} \in \Omega$ todennäköisyys saadaan n.k. Boltzmann jakaumasta

$$\mathsf{P}[\{\omega\}] = \frac{1}{Z} \exp\Big(\beta \sum_{<x,y> \in E} \omega_x \omega_y + \beta h \sum_{x \in V} \omega_x\Big),$$

missä $\beta > 0$ ja $h \in \mathbb{R}$ ovat parametreja, ja Z on vakio, joka valitaan niin, että normalisaatio (I.2) saadaan voimaan.

1.2. Tasainen jakauma

Äärellisellä joukolla Ω voidaan aina määritellä *tasainen todennäköisyysmitta* eli *tasainen jakauma*, nimittäin

$$p_\omega = \frac{1}{|\Omega|} \qquad \forall \omega \in \Omega$$

selvästi toteuttaa ehdot (I.1) ja (I.2). Yksinkertaisuudestaan huolimatta tämä on usein kiinnostavaa.

Tasaisen jakauman yksinkertaisuuskin on vain näennäistä — useissa tapauksissa jo joukon alkioiden tarkan lukumäärän tai edes lukumäärän asymptoottisen käyttäytymisen löytäminen johtaa hankalaan kombinatoriikkaan, ja samanaikaisesti luontevimpiin probabilistisiin kysymyksiin vastaaminen tulee vaikeaksi. Mainitsemme erään tärkeän fysikaalisen esimerkin, johon palaamme myöhemmin kurssilla.

Esimerkki I.5 (Itseään välttävä polymeeri)**.** Yksinkertaisin ja tärkein d-ulotteisessa avaruudessa asuvan polymeerin satunnaismalli on seuraava (kts. tarkemmin Luku II.4). Olkoon N kiinnitetty luonnollinen luku (monomeerien lukumäärä, jonka ajatellaan olevan suuri). Todennäköisyysavaruus koostuu origosta lähtevistä N askeleen itseään välttävistä poluista hilalla $\mathbb{Z}^d$, tarkemmin

$$\Omega = \Big\{ (\omega_j)_{j=0}^N \;\Big|\; \omega_0 = \underline{0},\ \forall j : \omega_j \in \mathbb{Z}^d,\ \forall j : |\omega_j - \omega_{j-1}| = 1,\ \forall i \neq j : \omega_i \neq \omega_j \Big\} .$$

Joukko Ω on selvästi äärellinen, vaikka sen suuruuden $c_N = \#\Omega$ laskeminen eksplisiittisesti onkin vaikeaa. Polymeeriä kuvaava todennäköisyysmitta on tasainen jakauma Ω:lla. Vaikka malli on ilmeisen pelkistetty, osoittautuu, että se kuvaa hyvin polymeerien statistista fysiikkaa.

1.2.1. *Esimerkki: tasaisesti valittu satunnainen permutaatio*

Tarkastelemme tässä osassa hieman lähemmin erästä mielenkiintoista esimerkkiä tasaisesta todennäköisyysmitasta äärellisellä joukolla, nimittäin tasaisesti valittua satunnaista permutaatiota. Tämä jakauma kuvaa luontevasti sekoitettua korttipakkaa, mutta sillä on itseasiassa lukuisia muitakin tärkeitä sovelluksia. Korttipakkaesimerkin jälkeen vilkaisemme lyhyesti mm. joitakin tietojenkäsittelytieteen ja statistisen fysiikankin kannalta relevantteja kysymyksiä.

Esimerkki I.6 (Korttipakka ja tasaisesti valittu satunnainen permutaatio)**.** Tavallinen korttipakka koostuu 52 kortista. Jos korttipakka on huolellisesti sekoitettu, on jokainen korttien järjestys yhtä todennäköinen.

Ajatelkaamme kortit numeroiduiksi, vaikkapa

$$\begin{array}{ccccc} 1 \leftrightarrow \spadesuit\mathrm{A}, & 2 \leftrightarrow \spadesuit 2 & 3 \leftrightarrow \spadesuit 3, & \ldots & 13 \leftrightarrow \spadesuit\mathrm{K} \\ 14 \leftrightarrow \heartsuit\mathrm{A}, & 15 \leftrightarrow \heartsuit 2, & \ldots & \ldots & 26 \leftrightarrow \heartsuit\mathrm{K}, \\ 27 \leftrightarrow \diamondsuit\mathrm{A}, & 28 \leftrightarrow \diamondsuit 2, & \ldots & \ldots & 39 \leftrightarrow \diamondsuit\mathrm{K}, \\ 40 \leftrightarrow \clubsuit\mathrm{A}, & 41 \leftrightarrow \clubsuit 2, & \ldots & 51 \leftrightarrow \clubsuit\mathrm{Q}, & 52 \leftrightarrow \clubsuit\mathrm{K}. \end{array}$$

Hieman yleistäen, merkitkäämme korttien lukumäärää n:llä (usein siis $n = 52$), ja olettakaamme kortit numeroiduiksi 1:stä n:än. Korttien järjestystä kuvaa luontevasti bijektio σ joukolta $[\![1, n]\!] = \{1, 2, \ldots, n\}$ korttien joukolle, jossa k:s kortti pakan päältä lukien on kortti numero $\sigma(k)$. Numeroinnin ansiosta järjestys σ on siis joukon $[\![1, n]\!]$ bijektio itselleen, eli n:n alkion permutaatio, eli symmetrisen ryhmän

$$S_n = \{\sigma \colon [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!] \text{ bijektio}\}$$

alkio. Permutaatioiden lukumäärä on $|S_n| = n!$, joten tasaisessa jakaumassa jokaisen järjestysten todennäköisyys on

$$p_\sigma = \frac{1}{n!} \qquad \sigma \in S_n.$$

Esimerkki I.7 (Korttipakkaan liittyviä tapahtumia)**.** Kun sekoitettua korttipakkaa mallinnetaan kuten yllä tasaisesti valitulla 52 alkion joukon permutaatiolla, tapahtumia ovat esimerkiksi

$$\begin{aligned} \{\text{päällimmäinen kortti on } \heartsuit\mathrm{Q}\} &= \{\sigma \in S_{52} \ : \ \sigma(1) = 25\}, \\ \{\text{jokin kortti on alkuperäisellä paikallaan}\} &= \{\sigma \in S_{52} \ : \ \sigma(j) = j \text{ jollakin } j\}, \\ \{\text{pohjimmaiset 3 korttia ovat ässiä}\} &= \{\sigma \in S_{52} \ : \ \sigma(50), \sigma(51), \sigma(52) \equiv 1 \pmod{13}\} \end{aligned}$$

ja niin edelleen. Ensimmäisen ja viimeisen tapahtuman todennäköisyydet ovat ilmeisen helppoja laskea, ne ovat $\frac{1}{52} \approx 1,9\%$ ja $\binom{4}{3}/\binom{52}{3} \approx 0,018\%$. Keskimmäinen kysymys voidaan esittää muodossa: onko satunnaisella permutaatiolla kiintopisteitä, eli 1-syklejä? Ongelma tunnetaan myös *rencontre-ongelmana*.

Esimerkki I.8 (Rencontre ongelma)**.** Rencontre ongelman ratkaisu havainnollistaa hyvin useita todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä ja -tekniikoita, joten esitämme sen ratkaisun tässä. Olkoon siis P tasainen todennäköisyysmitta S_n:llä, ja tarkastelkaamme tapahtumaa

$$E = \{\exists j \text{ s.e. } \sigma(j) = j\} \subset S_n$$

eli sitä, että satunnaisella permutaatiolla on (ainakin yksi) kiintopiste.

Merkitkäämme, kun $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$F_j = \{\sigma(j) = j\} \subset S_n$$

tapahtumaa, että j on satunnaisen permutaatiomme kiintopiste. Tapahtuma E on yhdiste

$$E = \bigcup_{j=1}^{n} F_j.$$

Tapahtumien F_j todennäköisyydet on hyvin helppo laskea, $\mathsf{P}[F_j] = \frac{1}{n}$, mutta aivan suoraan E:n todennäköisyyttä ei tästä saada, koska yhdiste $E = \cup_j F_j$ ei ole erillinen, vaan esimerkiksi pareittaiset leikkaukset ovat tapahtumat

$$F_{j_1} \cap F_{j_2} = \{\sigma(j_1) = j_1 \text{ ja } \sigma(j_2) = j_2\},$$

jotka ilmaisevat, että molemmat alkioista j_1 ja j_2 ovat kiintopisteitä. Väitteemme onkin, että E:n todennäköisyys saadaan inkluusio-ekskluusiokaavalla

$$\mathsf{P}[E] = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}[F_j] - \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le n} \mathsf{P}[F_{j_1} \cap F_{j_2}] + \sum_{1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le n} \mathsf{P}[F_{j_1} \cap F_{j_2} \cap F_{j_3}] - \cdots .$$

jossa vaiheittain korjataan tietyn tyyppisten permutaatioiden moninkertainen laskenta. Kaavan paikkaansapitävyys on kätevää tarkistaa esimerkiksi indikaattorisatunnaismuuttujien $\mathbb{1}_{F_j}$ ja $\mathbb{1}_E$ avulla.[2] Indikaattoreita koskien väitteemme on vastaavasti

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_E &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{F_j} - \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le n} \mathbb{1}_{F_{j_1} \cap F_{j_2}} + \sum_{1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le n} \mathbb{1}_{F_{j_1} \cap F_{j_2} \cap F_{j_3}} - \cdots \\
&= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n} \mathbb{1}_{F_{j_1} \cap \cdots \cap F_{j_m}} .
\end{aligned}$$

Tämä S_n:llä määriteltyjen funktioiden yhtäsuuruus on suoraviivaista tarkistaa. Jos nimittäin $\sigma \in S_n$, ja $K = \{j : \sigma(j) = j\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ on σ:n kiintopisteiden joukko, niin yllä olevan summan arvo pisteessä σ on $-\sum_{J \subset K, J \neq \emptyset} (-1)^{\#J}$. Vertaamalla binomikaavaan $\prod_{j \in K} (1 + x) = \sum_{J \subset K} x^{\#J}$ missä $x = -1$, toteamme lausekkeen arvon olevan yksi jos $K \neq \emptyset$ ja nolla jos $K = \emptyset$, siis täsmälleen tapahtuman E indikaattorin arvo.

Inkluusio-ekskluusiokaavassa esiintyvien tapahtumien todennäköisyydet onkin helppo laskea: kun $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$, on $\mathsf{P}[F_{j_1} \cap F_{j_2} \cap \cdots \cap F_{j_m}] = \frac{(n-m)!}{n!}$ (permutaatio, joka kiinnittää annetut m pistettä voidaan luonnollisesti identifioida $n - m$ alkion permutaation kanssa). Saamme siis

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}[E] &= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n} \mathsf{P}[F_{j_1} \cap \cdots \cap F_{j_m}] \\
&= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{(n-m)!}{n!} = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

Tulos on yhtä puuttuvaa termiä vaille osasumma eksponenttifunktion sarjakehitelmässä, ja suurilla n hyvä approksimaatio on $\mathsf{P}[E] \approx 1 - e^{-1}$.

Edellisessä esimerkissä laskimme todennäköisyyden, että satunnaisella permutaatiolla on kiintopiste eli että sen syklihajotelmassa on 1-sykli. Seuraavassa harjoitustehtävässä tarkastellaan joitakin muita permutaation syklihajotelmaan liittyviä kysymyksiä.

Tehtävä I.2. Muistutetaan, että permutaatio voidaan esittää syklien tulona siten, että jokainen alkio $1, 2, \ldots, n$ esiintyy täsmälleen yhdessä syklissä. Tässä syklihajotelmassa syklit ovat yksikäsitteisesti määritellyt (syklien järjestyksellä ei ole merkitystä).

Olkoon $\sigma \in S_n$ tasaisesti jakautunut permutaatio. Laske seuraavat suureet:

(a) Annetun alkion (esim. alkion 1) sisältävän syklin pituus on satunnaismuuttuja L. Mikä on L:n jakauma? Mikä on odotusarvo $\mathsf{E}[L]$?
(b) Millä todennäköisyydellä kaksi annettua alkiota kuuluvat samaan sykliin?
(c) Syklien lukumäärä on satunnaismuuttuja C. Mikä on odotusarvo $\mathsf{E}[C]$?

[2] Indikaattorisatunnaismuuttujan määritelmä löytyy tarvittaessa Esimerkistä I.18.

Tehtävä I.3. Kiinnitetään $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ja merkitään $n = n_1 + n_2$. Olkoon σ tasaisesti valittu satunnainen n:n alkion permutaatio, ja olkoon S satunnaismuuttuja, joka kertoo kuinka monta standardijärjestyksessä ensimmäistä alkioita kuuluu ensimmäisten n_1 alkion joukkoon järjestyksessä σ, eli

$$S = \max\Big(\big\{ s \in [\![1,n]\!] \;\big|\; \forall i \leq s : \sigma(i) \leq n_1 \big\} \cup \{0\} \Big)$$

Osoita, että S:n jakauma on seuraava

$$\mathsf{P}\big[S = s\big] = \frac{n_1!\,(n-s-1)!}{n!\,(n_1-s)!} n_2.$$

Osoita lisäksi, että jos $n_1 = rn$ ja $n_2 = (1-r)n$, missä $r \in (0,1)$ on kiinnitetty, ja tarkastelemme rajaa $n \to \infty$, niin pätee

$$\mathsf{P}\big[S = s\big] \longrightarrow (1-r)r^s.$$

Esimerkki I.9 (MergeSort)**.** Vielä yhtenä esimerkkisovelluksena satunnaisesta tasaisesti jakautuneesta permutaatiosta tarkastelemme MergeSort-algoritmin keskimäärin tarvitsemaa vertailujen lukumäärää (tämän ajatellaan yleensä vastaavan hyvin vastaavan tietokoneohjelman tarvitsemaa prosessoriaikaa, ja on siis kiinnostavimpia järjestysalgoritmin tehokkuuden mittareita).

Tehtävänä on järjestää alunperin satunnaisessa järjestyksessä oleva n alkion lista. MergeSort algoritmin idea on, että jos järjestämme ensin listan kaksi puolikasta, on koko listan järjestäminen sen jälkeen suoraviivaista. Rekursiivisesti algoritmia sovelletaan sitten molempiin puolikkaisiin, puolikkaiden puolikkaisiin ja niin edelleen kunnes puolittelu lopulta tuottaa yhden alkion kokoisia osalistoja, joita ei erikseen tarvitse järjestää. Oletamme selkeyden vuoksi ja notaatiota helpottaaksemme, että alkioiden lukumäärä on $n = 2^b$ jollakin $b \in \mathbb{N}$. Osalistoja päädytään silloin yhdistelemään $b-1$:llä eri tasolla: ensin 2^b kappaletta yhden alkion osalistoja yhdistetään 2^{b-1} kappaleeksi kahden alkion järjestettyjä listoja, sitten nämä kahden alkion listat yhdistetään 2^{b-2} kappaleeksi järjestettyjä neljän alkion listoja ja niin edelleen, kunnes kaksi kappaletta järjestettyjä 2^{b-1} alkion listoja yhdistetään järjestetyksi $n = 2^b$ alkion listaksi.

Kaksi järjestettyä osalistaa saadaan yhdistettyä järjestetyksi listaksi seuraavasti. Yhdistetyn listan pienimmäksi alkioksi tulee pienempi osalistojen pienimmistä alkioista, ja yhdistetyn listan seuraavaksi alkioksi tulee pienempi jäljellä olevien osalistojen pienimmistä alkioista ja niin edelleen. Saadaksemme siis uuden alkion yhdistettyyn listaan, meidän tulee suorittaa yksi kahden alkion vertailu.

Näin laskettuna siis vertailujen lukumäärä jokaisella tasolla on alkioiden yhteismäärä, $n = 2^b$. Koska tasoja on $b = \log_2(n)$ kappaletta, vertailujen lukumääräksi tulee

$$2^b \times b \;=\; n\,\log_2(n).$$

Mergesortin vaatimien vertailujen lukumäärä on siis $\mathcal{O}\big(n\log(n)\big)$, mikä on olennaisesti optimaalisen pieni määrä järjestystehtävän suorittamiseksi.

Jos listojen yhdistämistä katsotaan vielä hieman tarkemmin, huomataan, että teimme hitusen turhaakin työtä: jos osalistoista toinen oli jo tyhjennetty, oli tarpeetonta tehdä vertailuja uuden alkion lisäämiseksi yhdistettyyn listaan. Ainakin viimeisen yhdistettävän alkion, eli osalistojen alkoista suurimman kohdalla toinen lista oli väkisinkin jo tyhjä, ja viimeinen alkio voitiin laittaa paikalleen ilman vertailuja. Helposti huomataan, että tarpeettomia vertailuja oli täsmälleen niin monta kuin suurimpia alkioita sattui samaan osalistaan. Tarpeettomien vertailujen lukumäärät tasolla $t = 1, 2, \ldots, b-1$ eri osalistaparien yhdistämisille ovat satunnaismuuttujia $T_i^{(t)}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^{b-t})$. On suoraviivaista todeta, että jos alkuperäinen syöte oli tasaisesti jakautuneessa järjestyksessä (tasaisesti valittu satunnainen permutaatio), ovat nämä satunnaismuuttujat eri osalistojen yhdistämisille riippumattomat, ja niiden jakauma saadaan helposti Tehtävän I.3 tuloksesta. Kun tarpeettomat vertailut on poistettu, MergeSort algoritmin tarvitsemien vertailujen lukumäärä V on satunnaismuuttuja

$$V \;=\; 2^b \times b - \sum_{t=1}^{b-1} \sum_{i=1}^{2^{t-1}} T_i^{(t)},$$

missä satunnaismuuttujat $(T_t^{(i)})$, ovat riippumattomia, ja niiden jakaumat ovat sellaiset, että

$$\mathsf{P}\left[T_i^{(t)} = s\right] = 2^t \frac{2^{t-1}!\,(2^t - s - 1)!}{2^t!\,(2^{t-1} - s)!} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Eräs viimeaikoina paljon tutkittu kysymys on satunnaisen permutaation pisin kasvava osajono. Kysymys liittyy esimerkiksi erään pasianssin läpimenotodennäköisyyteen [**AD99**]. Ehkä kiinnostavimmat sovellukset tulokselle liittyvät kuitenkin statistisen fysiikan malleihin, kuten viimeläpäisyperkolaatioon (“last-passage percolation”), polynukleaariseen pinnan kasvuun (“polynuclear growth”), jne., katso esim. [**FS10**].

2. Todennäköisyysavaruuksien aksioomat ja yleistä teoriaa

2.1. Todennäköisyysavaruudet, satunnaismuuttujat ja odotusarvot

Kuten äärellisten todennäköisyysavaruuksien tapauksessa, yleisestikin todennäköisyysteoriassa perustavanlaatuisessa asemassa ovat

- “alkeistapahtumien” joukko eli “perusjoukko” Ω
- “tapahtumat”, jotka ovat osajoukkoja $E \subset \Omega$
- “todennäköisyysmitta”, funktio P tapahtumilta niiden todennäköisyyksille

Todennäköisyysmitan tulee olla additiivinen: esimerkiksi kahden erillisen tapahtuman yhdisteen todennäköisyys tulee olla näiden tapahtumien todennäköisyyksien summa (siis todennäköisyys sille, että jompi kumpi kahdesta toisensa poissulkevasta asiasta tapahtuu on summa tapahtumistodennäköisyyksistä). Kuten mittateoriassa, voimme yleensä vaatia additiivisuuden enintään numeroituvissa yhdisteissä, emmekä voi vaatia todennäköisyyttä määritellyksi kaikilla osajoukoilla $E \subset \Omega$, vaan tarvitsemme sopivan tapahtumien (eli mitallisten joukkojen) sigma-algebran $\mathcal{F}$. Todennäköisyysteoriassa sigma-algebralla on itseasiassa sekä tekninen rooli että tärkeä tulkinta: se kuvaa satunnaisesta systeemistä käytettävissä olevaa informaatiota.

2.1.1. *Kolmogorovin aksioomat todennäköisyysavaruudelle*

Todennäköisyysavaruus määritellään koostuvaksi yllä kuvatuista kolmikoista $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, joiden vaaditaan toteuttavan seuraavat Kolmogorovin aksioomat (vrt. mitta-avaruuden määritelmä esim. kurssilla Mitta ja integraali):

- Ω on joukko
- $\mathcal{F}$ on kokoelma Ω:n osajoukkoja, jolle pätee

$$\emptyset \in \mathcal{F} \tag{σ-i}$$

$$\text{jos } E \in \mathcal{F}, \text{ niin myös komplementti } \Omega \setminus E \in \mathcal{F} \tag{σ-ii}$$

$$\text{jos } E_n \in \mathcal{F} \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}, \text{ niin myös unioni } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{F} \tag{σ-iii}$$

- P on funktio $\mathcal{F} \to [0,1]$, jolle pätee

$$\mathsf{P}[\Omega] = 1 \tag{P-i}$$

$$\text{jos } E_n \cap E_m = \emptyset \text{ kaikilla } n \neq m, \text{ niin } \mathsf{P}\Big[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{P}[E_n] \tag{P-ii}$$

Nämä aksioomat ovat toivottavasti intuitiivisesti ilmeisiä vaatimuksia tapahtumille ja niiden todennäköisyyksille. Mittateoriassa ensimmäinen vaatimus korvattaisiin ehdolla $\mathsf{P}[\emptyset] = 0$, joka seuraa helposti ylläolevasta, mutta käänteinen implikaatio ei päde.[3]

Ilmaisu "melkein varmasti" tai lyhenne "m.v." vastaa mittateoriassa käytettyä "melkein kaikkialla" tai "m.k." — se siis tarkoittaa, että esitetty väite pätee kaikilla $\omega \in \Omega$ mahdollisesti nollamittaista poikkeusjoukkoa vaille.

Alla annamme lukuisia esimerkkejä todennäköisyysavaruuksista, joista useimpia tulemme käsittelemään tarkemmin myöhemmin tällä kurssilla. Tässä vaiheessa niiden on tarkoitus ainoastaan havainnollistaa sitä, mitä perusjoukko, tapahtumien sigma-algebra ja todennäköisyysmitta voisivat tilanteesta riippuen konkreettisesti olla.

Helpoin, äärellinen tapaus on itse asiassa jo käsitely.

Esimerkki I.10 (Äärelliset todennäköisyysavaruudet)**.** Aiemmin käsittelemämme äärelliset todennäköisyysavaruudet toteuttavat tietysti y.o. aksioomat. Silloin Ω on äärellinen joukko, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ kaikkien Ω:n osajoukkojen kokoelma, ja $\mathsf{P}[E] = \sum_{\omega\in E} p_\omega$, missä luvut $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ ovat nollan ja ykkösen välillä ja summautuvat ykköseen.

Useat tutut jakaumat vaikkapa kokonaisluvuilla tai reaaliakselilla toteuttavat myös y.o. aksioomat — annamme tässä esimerkkeinä Poisson jakauman ja Gaussisen jakauman. Lisäksi muistutamme, että tasainen jakauma yksikkövälillä on tuttu Lebesguen mitta.

Esimerkki I.11 (Poisson-jakauma)**.** Kun tarkastellaan jakaumia luonnollisilla luvuilla, on perusjoukko $\Omega = \mathbb{N}$. Edelleen perusjoukon ollessa numeroituva, voidaan kuten äärellisessäkin tapauksessa sigma-algebraksi ottaa kaikkien perusjoukon osajoukkojen kokoelma, nyt siis $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Poisson-jakauma parametrilla $\lambda > 0$ on se todennäköisyysmitta, jolle

$$\mathsf{P}[E] = \sum_{m\in E} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Esimerkki I.12 (Gaussinen jakauma reaaliakselilla)**.** Kun tarkastellaan jakaumia reaaliakselilla, on perusjoukkona reaaliluvut $\Omega = \mathbb{R}$ ja sigma-algebrana $\mathcal{F}$ reaaliakselin Borel-osajoukkojen kokoelma (pienin sigma-algebra, joka pitää sisällään kaikki avoimet joukot). Gaussinen todennäköisyysmitta keskiarvolla $\mu \in \mathbb{R}$ ja hajonnalla $\sigma > 0$ määritellään asettamalla Borel joukoille $E \subset \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}[E] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_E e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\, \mathrm{d}x.$$

[3]Määritelmiä vertailemalla voisi siis ajatella, että formaalisti todennäköisyysteoria on oleellisesti mittateoriaa lisäehdolla kokonaismitan äärellisyydestä, mutta tällainen lähestymistapa ei tee oikeutta todennäköisyyslaskennan intuitiolle eikä monille juuri todennäköisyysteoriassa keskeisille käsitteille kuten riippumattomuus, stokastiset konvergenssikäsitteet, sigma-algebran kuvaama informaatio, ehdolliset odotusarvot, satunnaisprosessien kopalukset, 0-1 lait jne. Hedelmällisempi lähestymistapa on, että mittateoriasta tutut tulokset pätevät sellaisenaan myös todennäköisyysteoriassa, joten käytössämme on jo valmiiksi paljon hyvää matematiikkaa, mutta keskeiseltä sisällöltään stokastiikka on itsenäinen ja syvällinen matematiikan ala.

Esimerkki I.13 (Tasainen todennäköisyysmitta yksikkövälillä)**.** Perusjoukkona on $\Omega = [0,1]$, tapahtumien joukkona $\mathcal{F}$ yksikkövälin Borel-osajoukkojen kokoelma, ja P on Lebesgue-mitan rajoittuma yksikkövälille.

Satunnaisprosessit, sekä diskreetit että jatkuvat, ovat myös tyypillisiä esimerkkejä. Tärkeimpinä esimerkkeinä mainitsemme tässä satunnaiskävelyn ja Brownin liikkeen, joihin palaamme tarkemmin myöhemmin, Luvussa I.5 ja Luvussa III.1.

Esimerkki I.14 (Yksinkertainen satunnaiskävely $\mathbb{Z}$:lla)**.** Yksinkertaisen yksiulotteisen satunnaiskävelyn perusjoukko Ω on kävelyjen eli sellaisten jonojen $S = (S_t)_{t=0}^{\infty}$ joukko, joissa alkupaikka on $S_0 = 0$, muut paikat ovat kokonaislukuja $S_t \in \mathbb{Z}\ \forall t \in \mathbb{N}$ ja askelten pituus on yksi yksikkö $|S_t - S_{t-1}| = 1\ \forall t \geq 1$. Tapahtumien joukko $\mathcal{F}$ on n.k. sylinterisigma-algebra (annamme määritelmän myöhemmin yleisemmässä tapauksessa). Todennäköisyysmitta määräytyy vaatimuksesta, että askeleet $(S_t - S_{t-1})_{t\in\mathbb{Z}_+}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, jakaumalla $\mathsf{P}[S_t - S_{t-1} = +1] = \frac{1}{2} = \mathsf{P}[S_t - S_{t-1} = -1]$.

Esimerkki I.15 (Brownin liike)**.** Brownin liike on satunnaisprosessi, joka saadaan skaalausrajana yksinkertaisista satunnaiskävelyistä, kuten Osassa III tulemme näkemään. Jo nyt mainitsemme, että sen todennäköisyysavaruuden perusjoukko koostuu jatkuvista poluista $B\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ eli $\Omega = C([0,T])$, $\mathcal{F}$ on metrisen avaruuden $(C([0,T]), \|\cdot\|_\infty)$ Borel sigma-algebra ja todennäköisyysmitta on myöhemmin kurssilla käsittelemämme Wienerin mitta.

Statistinen fysiikka sai alkunsa kaasujen statistisen mekaniikan tutkimuksesta. Alla mainitsemme sekä alkuperäisen Maxwell-Boltzmann jakauman klassiselle ideaalikaasulle että kovaytimisen kaasun mallin.

Esimerkki I.16 (Kovaytiminen kaasu d-ulotteisessa laatikossa)**.** Perusjoukon alkiot koostuvat N:n r-säteisen hiukkasen paikoista $(\underline{x}_j)_{j=1}^N$ laatikossa $[0,1]^d$ siten, että hiukkasilla ei ole päällekäisyyttä

$$\Omega = \left\{ (\underline{x}_j)_{j=1}^N \;\middle|\; \underline{x}_j \in (r, 1-r)^d\ \forall j \ \text{ ja } \ \|\underline{x}_j - \underline{x}_k\| > 2r\ \forall j \neq k \right\},$$

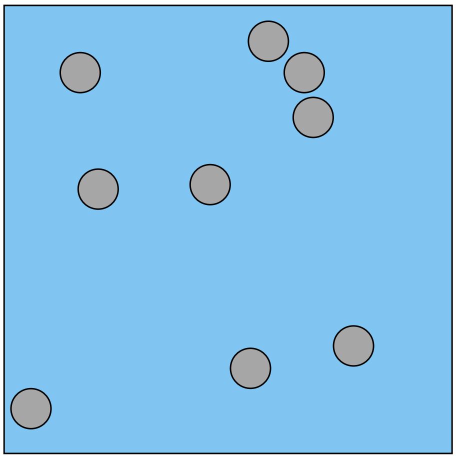
$\mathcal{F}$ on jälleen Borel sigma-algebra, ja todennäköisyysmitta on tasainen jakauma, eli Lebesguen mitta jaettuna koko $\Omega \subset \mathbb{R}^{Nd}$:n Lebesguen mitalla $|\Omega|$ (jonka laskeminen on sivumennen sanottuna hankalaa!). Kuva I.3 havainnollistaa mahdollista konfiguraatiota.

Esimerkki I.17 (Klassisen ideaalikaasun Maxwell-Boltzmann jakauma)**.** Perusjoukon alkiot koostuvat N:n pistemäisen yksikkömassaisen hiukkasen paikoista $(\underline{x}_j)_{j=1}^N$ laatikossa $V = [0,L] \times [0,L] \times [0,L] \subset \mathbb{R}^3$ sekä liikemääristä $(\underline{p}_j)_{j=1}^N$ eli

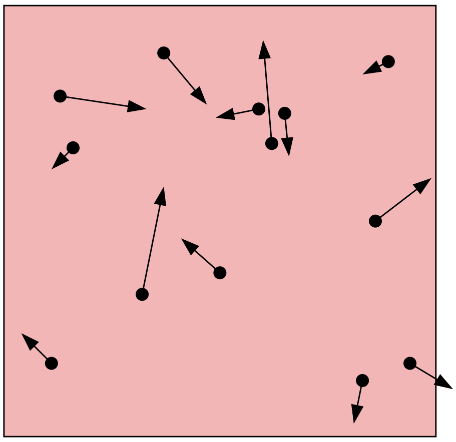
$$\Omega = \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{N \text{ kpl}} \times \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3}_{N \text{ kpl}},$$

$\mathcal{F}$ on jälleen Borel sigma-algebra, ja todennäköisyysmitta on

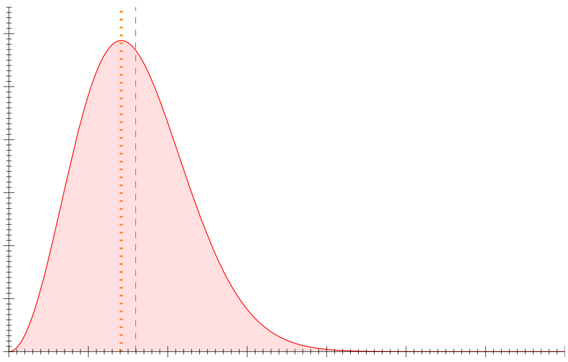
$$\mathsf{P}[X_1 \times \cdots \times X_N \times P_1 \times \cdots \times P_N] = \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{|X_j|}{|V|} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{P_j} e^{-\frac{1}{2}\beta \|\underline{p}_j\|^2}\, \mathrm{d}^3\underline{p}_j \right).$$



KUVA I.3. Kovaytimisen kaasun mallissa hiukkasilla on positiivinen säde $r > 0$, eikä kaksi hiukkasta voi olla niin lähellä toisiaan, että ne menisivät päällekäin, siis $\|\underline{x}_i - \underline{x}_j\| > 2r$.



(a) Pistemäiset hiukkaset sijaitsevat säiliön satunnaisissa paikoissa, ja niiden nopeudet (yleisemmin liikemäärät) ovat riippumattomia Gaussisia satunnaismuuttujia.



(b) Yhden hiukkasen vauhdin, eli nopeuden itseisarvon, jakauma: vauhdin todennäköisin arvo on hieman vauhdin odotusarvoa pienempi.

KUVA I.4. Maxwell-Boltzmann ideaalikaasu, Kuva I.4(a): havainnollistus, Kuva I.4(b): vauhdin jakauma.

2.1.2. *Satunnaismuuttujat ja odotusarvo*

Mittateoriassa mittaan liittyy vastaava integraali, joka on määritelty reaaliarvoisille integroituville funktioille (tai yleisemmin vektoriarvoisille funktioille komponenteittain). Todennäköisyysteoriassa mitallisia funktioita ja integraalia kutsutaan vastaavasti satunnaismuuttujiksi ja odotusarvoksi.

Satunnaismuuttuja X todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ on kuvaus $X \colon \Omega \to \mathfrak{X}$ (missä $\mathfrak{X}$ on jokin mitoituva avaruus, eli sigma-algebralla varustettu joukko) siten, että kaikille mitallisille $A \subset \mathfrak{X}$ pätee että $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ on tapahtuma, toisin sanoen $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Jos $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ varustettuna Borel sigma-algebralla, reaaliarvoisen satunnaismuuttujan X *odotusarvo* on tämän mitallisen funktion integraali todennäköisyysmittaa P vasten. Odotusarvoa merkitään tilanteesta riippuen joko mittateorian integraalinotaatiolla tai ytimekkäämmin E:llä — siis kaikki seuraavat tarkoittavat samaa

$$\mathsf{E}[X] = \int X \, \mathrm{d}\mathsf{P} = \int_\Omega X(\omega) \, \mathrm{d}\mathsf{P}(\omega).$$

Esimerkki I.18 (Tapahtuman indikaattori)**.** Melko triviaali, mutta usein kätevä satunnaismuuttuja on tapahtuman $E \in \mathcal{F}$ *indikaattori* $\mathbb{1}_E$

$$\mathbb{1}_E(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{jos } \omega \in E \\ 0 & \text{jos } \omega \notin E \end{cases}.$$

Erityisesti tapahtuman todennäköisyys voidaan lausua sen indikaattorin odotusarvona $\mathsf{P}[E] = \mathsf{E}[\mathbb{1}_E]$, tapahtumien leikkauksen indikaattori on indikaattorien tulo $\mathbb{1}_{E_1 \cap E_2} = \mathbb{1}_{E_1} \mathbb{1}_{E_2}$ ja niin edelleen.

Esimerkki I.19 (Yksinkertaisen satunnaismuuttujan odotusarvo)**.** Reaaliarvoista satunnaismuuttujaa X sanotaan *yksinkertaiseksi*, jos sillä on vain äärellisen monta mahdollista arvoa. Silloin se voidaan lausua lineaarikombinaationa indikaattorisatunnaismuuttujista

$$X = \sum_{j=1}^n x_j \mathbb{1}_{E_j},$$

missä tapahtumat E_j ovat erillisiä, $E_i \cap E_j = \emptyset$ kun $i \neq j$. Lisäksi X:n odotusarvo on

$$\mathsf{E}[X] = \sum_{j=1}^n x_j \mathsf{P}[E_j].$$

Esimerkki I.20 (Positiivisen satunnaismuuttujan odotusarvo)**.** Positiivista satunnaismuuttujaa X voidaan aina approksimoida alhaalta yksinkertaisilla satunnaismuuttujilla seuraavasti: voidaan muodostaa jono $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiivisia yksinkertaisia satunnaismuuttujia, jolle $X_n \nearrow X$ kun $n \to \infty$. Esimerkiksi tähän tarkoitukseen kelpaa jono

$$X_n = \sum_{j=1}^{4^n-1} \frac{j}{2^n} \mathbb{1}_{\{j2^{-n} \leq X < (j+1)2^{-n}\}} + 2^n \mathbb{1}_{\{X \geq 2^n\}}.$$

Jos $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on tällainen jono, niin X:n odotusarvo on

$$\mathsf{E}[X] = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[X_n],$$

missä yhtälön oikean puolen kasvavan jonon raja-arvoksi sallitaan tarvittaessa $+\infty$.

Esimerkki I.21 (Integroituvan satunnaismuuttujan odotusarvo)**.** Yleisessä tapauksessa reaaliarvoinen satunnaismuuttuja X voidaan jakaa positiiviseen ja negatiiviseen osaan, $X = X_+ - X_-$, missä

$$X_+(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{jos } X(\omega) \geq 0 \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

ja $X_- = X_+ - X$. Sekä X_+ että X_- ovat positiivisia satunnaismuuttujia. Jos $\mathsf{E}[X_+] < +\infty$ ja $\mathsf{E}[X_-] < +\infty$, satunnaismuuttujaa X sanotaan integroituvaksi, merkitään $X \in L^1(\mathsf{P})$. Silloin X:n odotusarvo on

$$\mathsf{E}[X] = \mathsf{E}[X_+] - \mathsf{E}[X_-].$$

Huomautus I.22. Ylläolevat esimerkit määrittelevät odotusarvon seuraavissa tapauksissa:

- $X \geq 0$ melkein varmasti eli $\mathsf{P}[\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \geq 0\}] = 1$
  - tässä tapauksessa pätee $\mathsf{E}[X] \in [0, +\infty]$
- X on integroituva, $X \in L^1(\mathsf{P})$
  - tässä tapauksessa $\mathsf{E}[X] \in \mathbb{R}$

Täsmälleen samalla tavalla mittateoriassa määritellään integraali mitan suhteen.

2.2. Yleisiä mittateorian tuloksia

Alla mainitut tärkeät tulokset ovat sekä intuitiivisia että toivottavasti tuttuja joko mittateoriasta tai todennäköisyysteoriasta. Merkitsemme tässä mittaa symbolilla μ — lukijan tulisi pitää mielessään erityisesti todennäköisyysmitat, mutta myös esimerkiksi Lebesguen mitta $\mathbb{R}^d$:llä tai sen osajoukoilla.

Positiivisille mitoille (erityisesti siis todennäköisyysmitoille) pätee seuraava alhaalta approksimaatio: jos $A_n \uparrow A$, niin $\mu(A_n) \nearrow \mu(A)$ (missä raja voi yleisessä tapauksessa olla ääretön). Todennäköisyysmitoille (tai yleisemmin äärellisille mitoille) vastaava tulos saadaan myös monotonisesti laskeville jonoille joukkoja: jos $A_n \downarrow A$, niin $\mu(A_n) \searrow \mu(A)$. Seuraavia mittateorian perustuloksia käytetään toisinaan kurssilla — lukija voi tarvittaessa katsoa niiden todistukset esimerkiksi kurssien *Mitta ja integraali* ja *Todennäköisyysteoria* luentomuistiinpanoista [**Hol02, Sot06**], kurssikirjoista [**ET85**] tai muista hyvistä oppikirjoista [**Wil91**].

Raja-arvon ja integroinnin järjestyksen voi usein vaihtaa. Seuraava aputulos on perustavan laatuinen muotoilu, jossa raja-arvojen olemassaoloa ei edes tarvitse olettaa, mutta samalla yhtälön sijasta joudutaan tyytymään epäyhtälöön.

Lemma I.23 (Fatoun lemma)**.** *Jos μ on mitta $\mathfrak{X}$:llä ja $(f_n)_{n=1}^\infty$ on jono epänegatiivisia mitallisia funktioita $\mathfrak{X}$:llä, niin*

$$\int_{\mathfrak{X}} (\liminf_{n\to\infty} f_n) \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Sekä mittojen teoriassa että käytännön laskuissa usein tärkeä kriteeri, jonka perusteella raja-arvon ja integroinnin järjestyksen vaihtaminen on sallittua on seuraava integrandijonon monotonisuus.

Lause I.24 (Monotonisen konvergenssin lause)**.** *Jos μ on mitta X:llä ja $(f_n)_{n=1}^\infty$ on kasvava jono epänegatiivisia mitallisia funktioita $\mathfrak{X}$:llä ja $f_n \uparrow f$ (μ-m.k.), niin*

$$\int_{\mathfrak{X}} f_n \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_{\mathfrak{X}} f \, \mathrm{d}\mu \qquad \textit{kun } n \to \infty.$$

Toinen käyttökelpoinen kriteeri on integrandijonon dominointi integroituvalla funktiolla.

Lause I.25 (Dominoidun konvergenssin lause)**.** *Oletetaan, että μ on mitta $\mathfrak{X}$:llä ja $g \in L^1(\mu)$ on positiivinen integroituva funktio. Jos $(f_n)_{n=1}^\infty$ on jono mitallisia funktioita $\mathfrak{X}$:llä, jolle $|f_n| \leq g$ ja $f_n \to f$ (μ-m.k.), niin silloin f on integroituva $f \in L^1(\mu)$ ja pätee*

$$\int_{\mathfrak{X}} f_n \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_{\mathfrak{X}} f \, \mathrm{d}\mu \qquad \textit{kun } n \to \infty.$$

Integrointien keskinäisen järjestyksen voi myös usein vaihtaa, kuten seuraavassa todetaan.

Lause I.26 (Fubinin lause)**.** *Oletetaan, että μ_1 ja μ_2 ovat (σ-äärellisiä) mittoja $\mathfrak{X}_1$:llä ja $\mathfrak{X}_2$:lla, vastaavasti, ja että $f\colon \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \to \mathbb{R}$ on mitallinen (tulosigma-algebran suhteen). Jos lisäksi f on epänegatiivinen tai jos f on integroituva tulomitan $\mu_1 \otimes \mu_2$ suhteen, niin kaikki seuraavista integraaleista ovat olemassa ja ovat yhtäsuuria*

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{X}_1\times\mathfrak{X}_2} f \,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\mathfrak{X}_2} \Big(\int_{\mathfrak{X}_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_1(x) \Big)\,\mathrm{d}\mu_2(y) \\ &= \int_{\mathfrak{X}_1} \Big(\int_{\mathfrak{X}_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_2(y) \Big)\,\mathrm{d}\mu_1(x).\end{aligned}$$

2.3. Yleisiä todennäköisyysteorian tuloksia

Kertaamme vielä joitakin todennäköisyysteorialle ominaisempia perustuloksia ja määritelmiä, joista lukija halutessaan löytää lisää yksityiskohtia kurssien *Todennäköisyyslaskenta* ja *Todennäköisyysteoria* materiaalista [**Tuo07, ET85, Sot06**] tai muista hyvistä oppikirjoista [**Wil91**].

2.3.1. *Riippumattomuus*

Riippumattomuus on hyvin keskeinen todennäköisyysteorian käsite. Sanomme, että sigma-algebramme $\mathcal{F}$ ali-sigma-algebrat $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \ldots$ ovat riippumattomat, jos kaikilla $G_1 \in \mathcal{G}_1$, $G_2 \in \mathcal{G}_2$, $\ldots$, $G_n \in \mathcal{G}_n$ pätee

$$\mathsf{P}\left[G_1 \cap \cdots \cap G_n\right] = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{P}[G_j].$$

Satunnaismuuttujan X virittämä sigma-algebra $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$ on pienin sigma-algebra, jonka suhteen X on mitallinen. Satunnaismuuttujat $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ovat riippumattomat, jos niiden virittämät sigma-algebrat $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \sigma(X_3), \ldots$ ovat riippumattomat. Tapahtumat $E_1, E_2, E_3, \ldots$ ovat riippumattomat, jos niiden indikaattorisatunnaismuuttujat $I_{E_1}, I_{E_2}, I_{E_3}, \ldots$ ovat riippumattomat. Sigma-algebrojen, satunnaismuuttujien tai tapahtumien riippumattomuutta merkitään usein lyhyesti symbolilla $\perp\!\!\!\perp$. Riippumattomien tapahtumien todennäköisyyksille saadaan suoraan määritelmän mukaan

$$\mathsf{P}\left[\bigcap_{j=1}^{n} E_j\right] = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{P}[E_j] \qquad \text{jos } (E_j)_{j=1}^{n} \perp\!\!\!\perp,$$

ja riippumattomien satunnaismuuttujien tulon odotusarvo on odotusarvojen tulo

$$\mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{n} X_j\right] = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{E}[X_j] \qquad \text{jos } (X_j)_{j=1}^{n} \perp\!\!\!\perp .$$

2.3.2. *Kertymäfunktio ja karakteristinen funktio*

Palautamme mieleen kaksi usein käytettyä tapaa spesifioida reaaliarvoisen satunnaismuuttujan jakauma (eli todennäköisyysmitta reaaliakselilla), kertymäfunktio ja karakteristinen funktio. Alla X oletetaan reaaliarvoiseksi satunnaismuuttujaksi (tai vastaavasti μ tn-mitaksi $\mathbb{R}$:llä).

Satunnaismuuttujan X *kertymäfunktio* on

$$F\colon\ \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F(x) = \mathsf{P}[X \le x] \tag{I.4}$$

(tai vastaavasti $F(x) = \mu\big((-\infty, x]\big)$).

Seuraava tulos karakterisoi funktiot, jotka kelpaavat kertymäfunktioiksi.

Propositio I.27. *Funktio $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ on jonkin satunnaismuuttujan kertymäfunktio jos ja vain jos*

- *F on kasvava, eli $x \le x' \ \Rightarrow\ F(x) \le F(x')$*
- *$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ ja $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$*
- *F on oikealta jatkuva, eli kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}$ pätee $\lim_{x\searrow x_0} F(x) = F(x_0)$.*

Seuraava tulos kertoo, että kertymäfunktio määrää satunnaismuuttujan jakauman (mitan reaaliakselilla).[4]

Propositio I.28. *Jos X_1, X_2 ovat satunnaismuuttujia, joilla on sama kertymäfunktio F, niin kaikilla Borel-joukoilla $A \subset \mathbb{R}$ pätee $\mathsf{P}[X_1 \in A] = \mathsf{P}[X_2 \in A]$.*

Satunnaismuuttujan X *karakteristinen funktio* on

$$\chi\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad\qquad \chi(\theta) = \mathsf{E}[e^{\mathrm{i}\,\theta X}] \tag{I.5}$$

(tai vastaavasti $\chi(\theta) = \int e^{\mathrm{i}\theta x} \mathrm{d}\mu(x)$).

Seuraava tulos karakterisoi funktiot, jotka kelpaavat karakteristisiksi funktioiksi.

Propositio I.29. *Funktio $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on jonkin reaaliarvoisen satunnaismuuttujan karakteristinen funktio jos ja vain jos*

- *$\chi(0) = 1$*
- *$|\chi(\theta)| \le 1$ ja $\chi(-\theta) = \overline{\chi(\theta)}$ kaikilla $\theta \in \mathbb{R}$*
- *χ on jatkuva funktio $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.*

Seuraava tulos kertoo, että karakteristinen funktio määrää satunnaismuuttujan jakauman (mitan reaaliakselilla), koska se määrää sen kertymäfunktion.

Propositio I.30. *Jos X on reaaliarvoinen satunnaismuuttuja, jonka karakteristinen funktio on χ, niin kaikille $a < b$ pätee*

$$\mathsf{P}[X \in (a,b)] + \frac{1}{2}\mathsf{P}[X \in \{a,b\}] \;=\; \lim_{R\to+\infty} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-\mathrm{i}\theta a} - e^{-\mathrm{i}\theta b}}{\mathrm{i}\theta} \chi(\theta)\,\mathrm{d}\theta\Big). \tag{I.6}$$

[4]Tämä on erikoistapaus yleisemmästä π-systeemejä koskevasta (alkeellisesta, mutta tärkeästä) tuloksesta. Perhe $\mathcal{I}$ avaruuden Ω osajoukkoja on *π-systeemi*, jos se on suljettu äärellisisten leikkausten suhteen, eli kaikilla $A_1, A_2 \in \mathcal{I}$ pätee $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{I}$. Yleisesti, mitta määräytyy rajoittumastaan π-systeemille. Tarkemmin, jos μ_1 ja μ_2 ovat mittoja mitoittuvalla avaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, ja $\mathcal{I}$ on π-systeemi Ω:lla, joka virittää sigma-algebran $\mathcal{F}$, eli $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{F}$, ja jos $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ kaikilla $A \in \mathcal{I}$, niin silloin mitat ovat samat, $\mu_1 = \mu_2$. Kertymäfunktion tapauksessa relevantti π-systeemi $\mathcal{I} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ koostuu reaaliakselin puoliäärettömistä väleistä ja se virittää Borel-sigma-algebran, $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}$.

Erityisesti karakteristinen funktio määrää X:n jakauman. Jos X:llä on lisäksi jatkuva todennäköisyystiheysfunktio f, niin pätee

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}\theta x} \chi(\theta)\, \mathrm{d}\theta. \tag{I.7}$$

Ylläolevista kaavoista (I.6) on toki yleisempi, mutta (I.7) on epäilemättä intuitiivisempi ja helpommin muistettava: se sanoo, että karakteristinen funktio on tiheysfunktion *Fourier-muunnos*.

Myös vektoriarvoisten satunnaismuuttujien karakteristinen funktio on mielekäs. Jos $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ on $\mathbb{R}^d$-arvoinen satunnaismuuttuja, niin Satunnaismuuttujan X *karakteristinen funktio* on

$$\chi\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \qquad\qquad \chi(\vec{\theta}) = \mathsf{E}[e^{\mathrm{i}\vec{\theta}\cdot\vec{X}}] = \mathsf{E}[e^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^d \theta_j X_j}]. \tag{I.8}$$

Propositio I.31. *Jos $\vec{X}, \vec{Y}$ ovat $\mathbb{R}^d$-arvoisia satunnaismuuttujia, joilla on sama karakteristinen funktio χ, niin kaikilla Borel-joukoilla $A \subset \mathbb{R}^d$ pätee*

$$\mathsf{P}[\vec{X} \in A] = \mathsf{P}[\vec{Y} \in A].$$

Bochnerin lause karakterisoi funktiot, jotka kelpaavat vektoriarvoisen satunnaismuuttujan karakteristisiksi funktioiksi. Sillä on myös ääretönulotteinen yleistys, joka on usein tärkeä matemaattisessa fysiikassa, n.k. Bochner-Minlos lause, katso esim. [**Kup12**]. Tällä kurssilla selviämme kuitenkin pääosin hyvin ilman sitä.

2.3.3. *Tapahtuminen äärettömän usein tai vain äärellisen monesti*

Jos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on jono tapahtumia, merkitsemme

$$\begin{aligned} \limsup(E_n) &= \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} E_n \\ &= \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \text{äärettömän monella } n \in \mathbb{N} \text{ pätee } \omega \in E_n\right\}. \end{aligned}$$

Käytämme tästä myös ilmaisua "E_n (tapahtuu) äärettömän usein".

Lemma I.32 (Ensimmäinen Borel-Cantelli Lemma)**.** *Jos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on jono tapahtumia joille*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{P}[E_n] < \infty,$$

niin melkein varmasti vain äärellisen moni E_n tapahtuu eli

$$\mathsf{P}[\limsup(E_n)] = 0.$$

Lemma I.33 (Toinen Borel-Cantelli Lemma)**.** *Jos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on jono riippumattomia tapahtumia joille $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{P}[E_n] = \infty$, niin melkein varmasti äärettömän moni E_n tapahtuu eli*

$$\mathsf{P}[\limsup(E_n)] = 1.$$

Kirjallisuutta

[AD99] David Aldous and Persi Diaconis. Longest increasing subsequences: from patience sorting to the Baik-Deift-Johansson theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 36(4):413–432, 1999.

[BS85] David Brydges and Thomas Spencer. Self-avoiding walk in 5 or more dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 97(1-2):125–148, 1985.

[Dur96] Richard Durrett. *Probability: Theory and Examples.* Duxbury Press, 2nd edition, 1996.

[ET85] G. Elfving and P. Tuominen. *Todennäköisyyslaskenta II.* Limes ry, Helsinki, 1985.

[FS10] Patrik L. Ferrari and Herbert Spohn. Random growth models. Review article, [arXiv:1003.0881]., 2010.

[Gri10] Geoffrey Grimmett. *Probability on graphs*, volume 1 of *IMS Textbooks Series.* Cambridge University Press, 2010.

[Hol02] Ilkka Holopainen. Mitta ja integraali, 2002. Luentomuistiinpanot, Helsingin yliopisto.

[HS92] Takashi Hara and Gordon Slade. Self-avoiding walk in five or more dimensions I. The critical behaviour. *Commun. Math. Phys.*, 147:101–136, 1992.

[Kup12] Antti Kupiainen. Introduction to statistical mechanics, 2012. Luentomuistiinpanot, Helsingin yliopisto.

[Rei98] Linda E. Reichl. *A modern course in statistical physics.* John Wiley & Sons, Inc, 2nd edition, 1998.

[Sot06] Tommi Sottinen. Todennäköisyysteoria, 2006. Luentomuistiinpanot, Helsingin yliopisto.

[Tuo07] Pekka Tuominen. *Todennäköisyyslaskenta I.* Limes ry., 8. painos edition, 2007.

[Väi07] Jussi Väisälä. *Topologia I.* Limes ry., 4. painos edition, 2007.

[Wil91] David Williams. *Probability with Martingales.* Cambridge Univ. Press, 1991.