Tehtävä 1. Olkoon $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ gaussinen vektori, jolle $\mathsf{E}[\xi_1] = 0$, $\mathsf{E}[\xi_2] = 0$, $\mathsf{E}[\xi_1^2] = a$, $\mathsf{E}[\xi_2^2] = b$ ja $\mathsf{E}[\xi_1 \xi_2] = c$. Laske $\mathsf{E}[\xi_1^n \xi_2^m]$ kun $n, m \in \mathbb{N}$.

Tehtävä 2. Olkoon V vektoriavaruus, jolla on kanta $(v_S)_{S \subset [\![1,d]\!]}$ joka on indeksoitu joukon $[\![1,d]\!]$ osajoukoilla S. Olkoot $b_i^\dagger, b_i \colon V \to V$, $i = 1, 2, \ldots, d$, lineaarikuvaukset

$$b_i^\dagger \, v_S = \begin{cases} 0 & \text{jos } i \in S \\ (-1)^{\#(S \cap [\![1,i-1]\!])} \, v_{S \cup \{i\}} & \text{jos } i \notin S \end{cases} \quad \text{ja} \quad b_i \, v_S = \begin{cases} (-1)^{\#(S \cap [\![1,i-1]\!])} v_{S \smallsetminus \{i\}} & \text{jos } i \in S \\ 0 & \text{jos } i \notin S \end{cases}.$$

(a) Osoita, että kaikilla i, j ylläolevien lineaarikuvausten antikommutaattorit ovat

$$[b_i, b_j]_+ = 0, \qquad [b_i^\dagger, b_j^\dagger]_+ = 0, \qquad [b_i, b_j^\dagger]_+ = \delta_{i,j} \, \mathrm{id}_V.$$

(b) Määritellään duaalivektori $v_\varnothing^* \in V^*$ kaavalla $\langle v_\varnothing^*, v_S \rangle = \delta_{S,\varnothing}$. Osoita, että

$$b_i \, v_\varnothing = 0 \quad \forall i, \qquad \text{ja} \qquad \langle v_\varnothing^*, \, b_i^\dagger \, v \rangle = 0 \quad \forall i \; \forall v \in V.$$

Tehtävä 3. Tarkastellaan yhtälöä $\tanh(y) = e^{-2x}$, josta ratkaisemme $y \in \mathbb{R}$.

(a) Osoita, että kaikilla $x > 0$ tällä yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu.

(b) Merkitään tätä ratkaisua $f(x) = y$. Osoita, että $f(x) > 0$ kaikilla $x > 0$ ja että $x \mapsto f(x)$ on vähenevä ja että se on bijektio $(0, \infty)$:ltä itselleen.

(c) Osoita, että yhtälöllä $f(x) = x$, $x > 0$, on yksikäsitteinen ratkaisu. Ratkaise x.

Tehtävä 4. Olkoon $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$. Merkitään kommutaattoria $[A, B] = AB - BA$. Todista seuraavat väitteet.

(a) Pätee $[AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B$.

(b) Jos $[A, B] = 0$, niin $[\exp(A), B] = 0$.

(c) Jos $[A, B] = 0$, niin $\exp(A + B) = \exp(A)\,\exp(B)$.

(d) Jos $A\,\underline{v} = \lambda\,\underline{v}$, niin $\exp(A)\,\underline{v} = e^\lambda\,\underline{v}$.

(e) Jos C on kääntyvä ja $B = C^{-1}\,A\,C$, niin $\exp(B) = C^{-1}\,\exp(A)\,C$.

Tehtävä 5. Olkoon $G = (V, E)$ äärellinen graafi, $\mathcal{S} = \{-1, +1\}^V$, $H \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, ja $\beta > 0$. Olkoon $N = (N_t)_{t \in [0,\infty)}$ Poisson prosessi intensiteetillä $\lambda = \#V$, ja $0 < A_1 < A_2 < \cdots$ sen saapumisajat. Olkoon vielä $\underline{\sigma}^{(0)} \in \mathcal{S}$. Asetetaan aluksi $X_t = \underline{\sigma}^{(0)}$ kaikilla $t \in [0, A_1)$. Arvo X_t välillä $t \in [A_{n-1}, A_n)$ määritellään niin, että valitaan tasaisesti jakautunut satunnainen graafin piste $z_n \in V$, ja päivitetään spinin arvo tässä pisteessä z_n ehdollisesta Boltzmann jakaumasta kun muiden spinien arvot pidetään ennallaan (kts. Harjoitusten 8 Tehtävä 3), ja nämä satunnaiset valinnat ovat keskenään riippumattomia ja riippumattomia prosessista N. Osoita, että näin määritelty prosessi $(X_t)_{t \in [0,\infty)}$ on Poisson-hyppyprosessi joukolla $\mathcal{S}$, jonka siirtymäintensiteetit ovat

$$\lambda_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} = \begin{cases} \frac{\exp(-\beta H(\underline{\sigma}'))}{\exp(-\beta H(\underline{\sigma})) + \exp(-\beta H(\underline{\sigma}'))} & \text{jos } \#\left\{ v \in V \,\middle|\, \sigma_v \neq \sigma'_v \right\} = 1 \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}.$$

Exercises in English on the other side.

Exercise 1. Let $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ be a gaussian vector, so that $\mathsf{E}[\xi_1] = 0$, $\mathsf{E}[\xi_2] = 0$, $\mathsf{E}[\xi_1^2] = a$, $\mathsf{E}[\xi_2^2] = b$ and $\mathsf{E}[\xi_1 \xi_2] = c$. Calculate $\mathsf{E}[\xi_1^n \xi_2^m]$ for $n, m \in \mathbb{N}$.

Exercise 2. Let V be a vector space with basis $(v_S)_{S \subset [\![1,d]\!]}$ indexed by subsets S of $[\![1,d]\!]$. Let $b_i^\dagger, b_i \colon V \to V$, $i = 1, 2, \ldots, d$, be the linear maps

$$b_i^\dagger\, v_S = \begin{cases} 0 & \text{if } i \in S \\ (-1)^{\#(S \cap [\![1,i-1]\!])}\, v_{S \cup \{i\}} & \text{if } i \notin S \end{cases} \qquad \text{and} \qquad b_i\, v_S = \begin{cases} (-1)^{\#(S \cap [\![1,i-1]\!])} v_{S \setminus \{i\}} & \text{if } i \in S \\ 0 & \text{if } i \notin S \end{cases}.$$

(a) Show that for all i, j, the anticommutators of the above linear maps read

$$[b_i, b_j]_+ = 0, \qquad [b_i^\dagger, b_j^\dagger]_+ = 0, \qquad [b_i, b_j^\dagger]_+ = \delta_{i,j}\, \mathrm{id}_V.$$

(b) Define the dual vector $v_\varnothing^* \in V^*$ by $\langle v_\varnothing^*, v_S \rangle = \delta_{S,\varnothing}$. Show that

$$b_i\, v_\varnothing = 0 \quad \forall i, \qquad \text{and} \qquad \langle v_\varnothing^*, b_i^\dagger\, v \rangle = 0 \quad \forall i\ \forall v \in V.$$

Exercise 3. Consider the equation $\tanh(y) = e^{-2x}$, to be solved for $y \in \mathbb{R}$.

(a) Show that for all $x > 0$ this equation has a unique solution.

(b) Denote the solution by $f(x) = y$. Show that $f(x) > 0$ for any $x > 0$, and that $x \mapsto f(x)$ is a decreasing and bijective mapping from $(0, \infty)$ to itself.

(c) Show that the equation $f(x) = x$ has a unique solution $x > 0$. Find the solution x.

Exercise 4. Let $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$ and $\lambda \in \mathbb{C}$. Denote the commutator by $[A, B] = AB - BA$. Prove the following statements.

(a) We have $[AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B$.

(b) If $[A, B] = 0$, then $[\exp(A), B] = 0$.

(c) If $[A, B] = 0$, then $\exp(A + B) = \exp(A)\, \exp(B)$.

(d) If $A\,\underline{v} = \lambda\,\underline{v}$, then $\exp(A)\,\underline{v} = e^\lambda\,\underline{v}$.

(e) If C is invertible and $B = C^{-1}\,A\,C$, then $\exp(B) = C^{-1}\, \exp(A)\, C$.

Exercise 5. Let $G = (V, E)$ be a finite graph, $\mathcal{S} = \{-1, +1\}^V$, $H \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, and $\beta > 0$. Let $N = (N_t)_{t \in [0,\infty)}$ be a Poisson process with intensity $\lambda = \#V$, and $0 < A_1 < A_2 < \cdots$ its arrival times. Let furthermore $\underline{\sigma}^{(0)} \in \mathcal{S}$. Set first $X_t = \underline{\sigma}^{(0)}$ for all $t \in [0, A_1)$. The value X_t on the interval $t \in [A_{n-1}, A_n)$ is defined by choosing a uniformly random vertex $z_n \in V$ of the graph, and updating the value of the spin at z_n from the conditional Boltzmann distribution keeping the rest of the spin values intact (see Problem sheet 8, Exercise 3), and so that these random choices are independent of each other and the process N. Show that the process $(X_t)_{t \in [0,\infty)}$ thus defined, is a Poisson jump process on $\mathcal{S}$ with transition intensities

$$\lambda_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} = \begin{cases} \frac{\exp(-\beta H(\underline{\sigma}'))}{\exp(-\beta H(\underline{\sigma})) + \exp(-\beta H(\underline{\sigma}'))} & \text{if } \#\left\{ v \in V \,\middle|\, \sigma_v \neq \sigma_v' \right\} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Suomenkieliset tehtävät toisella puolella.