Todennäköisyys ja statistinen fysiikka **Harjoitukset 8**
Kevät 2014 **27.3.2014**

Tehtävä 1. Olkoon $B = (B_t)_{t\geq 0}$ standardi Brownin liike. Määritellään satunnaisprosessi $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ asettamalla $X_t = B_t - tB_1$.

(a) Osoita, että X on gaussinen prosessi. Laske X:n odotusarvo- ja kovarianssifunktiot eli $t \mapsto \mathsf{E}[X_t]$ ja $(s,t) \mapsto \mathsf{Cov}[X_s, X_t]$.

(b) Osoita, että X ja B_1 ovat riippumattomia.

Vihje. X:n jakauma määräytyy äärellisdimensioisista marginaaleista $\mathsf{P}[X_{t_k} \in A_k, k = 1,2,\ldots,n]$. Kannattaa myös hyödyntää gaussisuutta.

Tehtävä 2. Olkoon $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ jatkuva ja gaussinen prosessi, jolle $\mathsf{E}[X_t] = 0$ kaikilla $t \in [0,1]$ ja $\mathsf{Cov}[X_s, X_t] = s(1-t)$ kaikilla $0 \leq s \leq t \leq 1$. Olkoon $Y \sim N(0,1)$ riippumaton X:stä. Määritellään satunnaisprosessi $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$ asettamalla $W_t = X_t + tY$. Osoita, että W on standardi Brownin liike (aikavälillä $[0,1]$). Määritellään W:n *ehdollistettu jakauma* ehdolla $W_1 = y$ siten, että ensin ehdollistetaan W tapahtumalle $|W_1 - y| < \varepsilon$, jonka todennäköisyys on positiivinen, ja sitten otetaan raja $\varepsilon \searrow 0$. Etsi W:n jakauma ehdollistettuna $W_1 = y$:lle.

Tehtävä 3. Olkoon $G = (V,E)$ äärellinen graafi, $\mathcal{S} = \{-1,+1\}^V$ sen Ising spinkonfiguraatioiden joukko, $H\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ Hamiltonin funktio ja P vastaava Boltzmann jakauma parametrillä $\beta > 0$. Olkoon $z \in V$ graafin jokin piste, $\underline{\varsigma} \in \{-1,+1\}^{V\setminus\{x\}}$ spin konfiguraatio muualla, ja $\underline{\varsigma}^+$ ja $\underline{\varsigma}^-$ spin konfiguraatiot

$$\varsigma_x^{\pm} = \begin{cases} \varsigma_x & \text{kun } x \neq z \\ \pm 1 & \text{kun } x = z \end{cases}.$$

Kun $\underline{\sigma} \sim \mathsf{P}$, osoita seuraavat kaavat ehdollisille todennäköisyyksille

$$\mathsf{P}\Big[\underline{\sigma} = \underline{\varsigma}^{\pm} \,\Big|\, \underline{\sigma}|_{V\setminus\{x\}} = \underline{\varsigma}\Big] = \frac{e^{-\beta H(\underline{\varsigma}^{\pm})}}{e^{-\beta H(\underline{\varsigma}^{+})} + e^{-\beta H(\underline{\varsigma}^{-})}}.$$

Tehtävä 4. Olkoon $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ hyppyprosessi äärellisellä joukolla $\mathcal{S}$, jonka hyppyintensiteetit ovat $\lambda_{x,y}$, $x,y \in \mathcal{S}$. Olkoon $p_x(t) = \mathsf{P}[X_t = x]$, $x \in \mathcal{S}$. Osoita, että

$$\forall x \in \mathcal{S},\ \forall t \geq 0: \qquad p_x'(t) = \sum_{y\in\mathcal{S}} \Big(\lambda_{y,x} p_y(t) - \lambda_{x,y} p_x(t)\Big).$$

Vihje: Lausu esimerkiksi $\mathsf{P}[X_{t+h} = x] = \sum_{y\in\mathcal{S}} \mathsf{P}\big[X_{t+h} = x \,\big|\, X_t = y\big]\, \mathsf{P}[X_t = y]$.

Tehtävä 5. Määritellään funktiot $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = e^{\alpha x}$, $f_4(x) = \sin(\alpha x)$, missä $\alpha \in \mathbb{R}$, ja differentiaalioperaattori $L = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

(a) Laske Lf_k, $k = 1,2,3,4$.

(b) Sovella tätä odotusarvon $\mathsf{E}[f_k(B_t)]$ laskemiseksi, missä $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ on standardi Brownin liike.

Exercises in English on the other side.

Exercise 1. Suppose that $B = (B_t)_{t\geq 0}$ is a standard Brownian motion. Define a stochastic process $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ by setting $X_t = B_t - tB_1$.

(a) Show that X is a Gaussian process. Calculate the mean function and the covariance function of X, i.e., $t \mapsto \mathsf{E}[X_t]$ and $(s,t) \mapsto \mathsf{Cov}[X_s, X_t]$.

(b) Show that X and B_1 are independent.

Hint. The distribution of X is determined by the finite dimensional marginals $\mathsf{P}[X_{t_k} \in A_k, k = 1, 2, \ldots, n]$. Also you can maybe use the Gaussianity of the processes.

Exercise 2. Suppose that $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ is a continuous and Gaussian process, for which $\mathsf{E}[X_t] = 0$ for all $t \in [0,1]$ and $\mathsf{Cov}[X_s, X_t] = s(1-t)$ for all $0 \leq s \leq t \leq 1$. Let $Y \sim N(0,1)$ be a random variable independent from X. Define a stochatic process $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$ by setting $W_t = X_t + tY$. Show that W is a standard Brownian motion (on the time interval $[0,1]$). Define the *conditional distribution* of W given $W_1 = y$ by first conditioning W on the event $|W_1 - y| < \varepsilon$, which has positive probability, and then taking the limit $\varepsilon \searrow 0$. Find the conditional distribution of W given $W_1 = y$.

Exercise 3. Let $G = (V, E)$ be a finite graph, $\mathcal{S} = \{-1,+1\}^V$ the set of its Ising spin configurations, $H\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ a Hamiltonian function and P the corresponding Boltzmann distribution with parameter $\beta > 0$. Let $z \in V$ be a vertex of the graph, $\underline{\varsigma} \in \{-1,+1\}^{V\setminus\{x\}}$ a spin configuration elsewhere, and $\underline{\varsigma}^+$ and $\underline{\varsigma}^-$ the spin configurations

$$\varsigma^\pm_x = \begin{cases} \varsigma_x & \text{for } x \neq z \\ \pm 1 & \text{for } x = z \end{cases}.$$

When $\underline{\sigma} \sim \mathsf{P}$, derive the following formulas for conditional probabilities

$$\mathsf{P}\Big[\underline{\sigma} = \underline{\varsigma}^\pm \;\Big|\; \underline{\sigma}_{|V\setminus\{x\}} = \underline{\varsigma}\Big] = \frac{e^{-\beta H(\underline{\varsigma}^\pm)}}{e^{-\beta H(\underline{\varsigma}^+)} + e^{-\beta H(\underline{\varsigma}^-)}}.$$

Exercise 4. Let $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ be a jump process on a finite set $\mathcal{S}$, with jump intensities $\lambda_{x,y}$, $x, y \in \mathcal{S}$. Let $p_x(t) = \mathsf{P}[X_t = x]$, $x \in \mathcal{S}$. Show that

$$\forall x \in \mathcal{S},\ \forall t \geq 0: \qquad p'_x(t) = \sum_{y\in\mathcal{S}} \Big(\lambda_{y,x} p_y(t) - \lambda_{x,y} p_x(t)\Big).$$

Hint: Write for example $\mathsf{P}[X_{t+h} = x] = \sum_{y\in\mathcal{S}} \mathsf{P}\big[X_{t+h} = x \,\big|\, X_t = y\big] \mathsf{P}[X_t = y]$.

Exercise 5. Define the functions $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = e^{\alpha x}$, $f_4(x) = \sin(\alpha x)$, where $\alpha \in \mathbb{R}$, and the differentialoperator $L = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

(a) Calculate Lf_k, $k = 1, 2, 3, 4$.

(b) Apply this to the calculations of the expected value $\mathsf{E}[f_k(B_t)]$, where $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ is a standard Brownian motion.

Suomenkieliset tehtävät toisella puolella.