Todennäköisyys ja statistinen fysiikka **Harjoitukset 7**
Kevät 2014 **20.3.2014**

Tehtävä 1. Olkoon $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ satunnaisvektori, jolla on todennäköisyystiheys $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Osoita, että jos matriisi $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on symmetrinen ja positiivinen ($\underline{v}^\top C \underline{v} > 0$ kaikilla $\underline{v} \neq 0$), $\underline{M} \in \mathbb{R}^n$ ja tiheys p voidaan kirjoittaa muodossa

$$p(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det(C)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{M})^\top \, C^{-1} \, (\underline{x} - \underline{M})\right),$$

niin $\underline{\xi}$ on gaussinen vektori odotusarvovektorilla $\underline{M}$ ja kovarianssimatriisilla C.

Tehtävä 2. Olkoon $B = (B_t)_{t\geq 0}$ standardi Brownin liike $\mathbb{R}$:llä. Merkitään satunnaismuuttujan $B_t \sim \mathrm{N}(0,t)$ tiheysfunktiota $p_t : \mathbb{R} \to [0, \infty)$.

(a) Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota $(t, x) \mapsto p_t(x)$. Osoita, että se toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön $\frac{\partial}{\partial t} p_t(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t(x)$.

(b) Määritellään d-ulotteinen standardi Brownin liike $(\underline{B}_t)_{t\in[0,\infty)}$ asettamalla

$$\underline{B}_t = B_t^{(1)} \underline{e}_1 + \cdots + B_t^{(d)} \underline{e}_d,$$

missä komponentit $B^{(1)}, \ldots, B^{(d)}$ ovat riippumattomia standardeja Brownin liikkeitä $\mathbb{R}$:llä. Olkoon $p_t : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ satunnaisvektorin $\underline{B}_t$ tiheysfunktio. Osoita, että

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x_1, \ldots, x_d) = \frac{1}{2} \Delta p_t(x_1, \ldots, x_d), \quad \text{missä } \Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \qquad \text{(“lämpöyhtälö”)}$$

Tehtävä 3. Olkoon $N = (N_t)_{t\geq 0}$ Poisson prosessi intensiteetillä λ. Satunnaismuuttujan $N_t \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$ jakauma määräytyy todennäköisyyksistä $p_k(t) := \mathsf{P}[N_t = k]$. Osoita, että nämä todennäköisyydet toteuttavat differentiaaliyhtälösysteemin

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_k(t) = \lambda \, p_{k-1}(t) - \lambda \, p_k(t) \text{ , kun } k \in \mathbb{Z}_{>0}, \qquad \text{ja} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_0(t) = -\lambda \, p_0(t).$$

Tehtävä 4. Jos $B = (B_t)_{t\geq 0}$ on standardi Brownin liike, niin määritellään prosessit $W = (W_t^{(k)})_{t\geq 0}$, $k = 1, 2, 3$, kaavoilla

$$W_t^{(1)} = B_{s+t} - B_s$$
$$W_t^{(2)} = \lambda^{-1/2} B_{\lambda t}$$
$$W_t^{(3)} = \begin{cases} t B_{1/t} & \text{, kun } t > 0 \\ 0 & \text{, kun } t = 0 \end{cases}$$

missä $s \geq 0$ ja $\lambda > 0$ ovat vakioita. Osoita, että prosessit $W = (W_t^{(k)})_{t\geq 0}$, $k = 1, 2, 3$, ovat standardeja Brownin liikeitä.

Tehtävä 5. Osoita, että satunnaismuuttujalla T, jonka arvot ovat epänegatiivisia kokonaislukuja, on uusiutumisominaisuus $\mathsf{P}\big[T = s + k \,\big|\, T \geq s\big] = \mathsf{P}[T = k]$ kaikilla $s, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, jos ja vain jos $T \sim \mathrm{Geom}(q)$ jollakin $q \in (0, 1)$.

Exercises in English on the other side.

Exercise 1. Let $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ be a random vector which has a probability density $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Show that, if $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is a symmetric and positive ($\underline{v}^\top C \underline{v} > 0$ for any $\underline{v} \neq 0$) matrix and $\underline{M} \in \mathbb{R}^n$ and density p can be written as

$$p(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\det(C)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{M})^\top\, C^{-1}\, (\underline{x}-\underline{M})\right),$$

then $\underline{\xi}$ is multivariate Gaussian with mean vector $\underline{M}$ and covariance matrix C.

Exercise 2. Let $B = (B_t)_{t\geq 0}$ be a standard Brownian motion on $\mathbb{R}$. Denote the probability density of the random variable $B_t \sim \mathrm{N}(0,t)$ by $p_t : \mathbb{R} \to [0,\infty)$.

(a) Consider the function of two variables $(t,x) \mapsto p_t(x)$. Show that it satisfies the partial differential equation $\frac{\partial}{\partial t} p_t(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t(x)$.

(b) Define the d-dimensional standard Brownian motion $(\underline{B}_t)_{t\in[0,\infty)}$ by setting

$$\underline{B}_t = B_t^{(1)}\underline{e}_1 + \cdots + B_t^{(d)}\underline{e}_d,$$

where the components $B^{(1)}, \ldots, B^{(d)}$ are independent standard Brownian motions on $\mathbb{R}$. Let $p_t : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ be the density of the random vector $\underline{B}_t$. Show that

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x_1,\ldots,x_d) = \frac{1}{2}\Delta p_t(x_1,\ldots,x_d), \quad \text{where } \Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \qquad \text{(“heat equation”)}$$

Exercise 3. Let $N = (N_t)_{t\geq 0}$ be a Poisson process with intensity λ. The distribution of the random variable $N_t \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$ is determined by the probabilities $p_k(t) := \mathsf{P}[N_t = k]$. Show that these probabilities satisfy the following system of differential equations

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_k(t) = \lambda\, p_{k-1}(t) - \lambda\, p_k(t)\ , \text{ for } k \in \mathbb{Z}_{>0}, \qquad \text{and} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_0(t) = -\lambda\, p_0(t).$$

Exercise 4. Suppose that $B = (B_t)_{t\geq 0}$ is a standard Brownian motion and define stochastic processes $W = (W_t^{(k)})_{t\geq 0}$, $k = 1,2,3$, by setting

$$W_t^{(1)} = B_{s+t} - B_s$$
$$W_t^{(2)} = \lambda^{-1/2} B_{\lambda t}$$
$$W_t^{(3)} = \begin{cases} tB_{1/t} & , \text{ when } t > 0 \\ 0 & , \text{ when } t = 0 \end{cases}$$

where $s \geq 0$ and $\lambda > 0$ are constants. Show that the stochastic processes $W = (W_t^{(k)})_{t\geq 0}$, $k = 1,2,3$, are standard Brownian motions.

Exercise 5. Show that a random variable T, whose values are non-negative integers, has the memorylessness property $\mathsf{P}\big[T = s+k \,\big|\, T \geq s\big] = \mathsf{P}[T = k]$ for any $s,k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ if and only if $T \sim \mathrm{Geom}(q)$ for some $q \in (0,1)$.

Suomenkieliset tehtävät toisella puolella.