Todennäköisyys ja statistinen fysiikka **Harjoitukset 6**
Kevät 2014 **27.2.2014**

Tehtävä 1. Tarkastellaan itseään välttäviä kävelyitä neliöhilalla $\mathbb{Z}^2$. Muistutetaan, että $\mu = \lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{c_N} = \lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{h_N} = \lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{b_N}$. Osoita, että $\mu \geq 2.101$.

Tehtävä 2. Määritellään $G_{\mathcal{C}}(z) = \sum_{N=0}^{\infty} c_N z^N$. Olettaen $c_N = \mu^N N^{\gamma-1+o(1)}$ kun $N \to \infty$, missä $\gamma \geq 1$, näytä, että kun $z \nearrow z_c = \frac{1}{\mu}$

$$\frac{\log\left(G_{\mathcal{C}}(z)\right)}{\log(z_c - z)} \longrightarrow -\gamma.$$

Vihje. Voit aloittaa arvioimalla $\sum_{N=0}^{\infty} e^{-N\delta} N^{\alpha} \leq e^{\delta} \int_0^{\infty} e^{-x\delta} x^{\alpha}\, \mathrm{d}x$, kun $\alpha \geq 0$ ja $\delta > 0$.

Tehtävä 3. Olkoon S äärellinen tai numeroituvasti ääretön joukko. Määritellään $\varrho \colon S^{\mathbb{N}} \times S^{\mathbb{N}} \to [0, \infty)$ kaavalla

$$\varrho(\omega, \omega') = \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ \omega_i \neq \omega'_i}} 2^{-i} \qquad \text{kun } \omega, \omega' \in S^{\mathbb{N}},\ \omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}},\ \omega' = (\omega'_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Osoita, että ϱ on metriikka joukolla $S^{\mathbb{N}}$, ja että metrinen avaruus $(S^{\mathbb{N}}, \varrho)$ on täydellinen ja separoituva.

Tehtävä 4. Tarkastellaan Isingin mallia $[\![-N, N]\!]$:llä periodisilla reunaehdoilla ja ilman ulkoista magneettikenttää. Merkitään tätä Boltzmannin jakaumaa $\mathsf{P}_{N,\beta}$:lla. Osoita, että millä tahansa $i, j \in \mathbb{Z}$ pätee

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,\beta}[\sigma_i = \sigma_j] = \frac{1}{2}\Big(1 + (\tanh\beta)^{|i-j|}\Big)$$

Riippuuko raja-arvo reunaehdoista?

Tehtävä 5. Tarkastellaan, kuten tehtävässä 4, Isingin mallia $[\![-N, N]\!]$:llä periodisilla reunaehdoilla ja ilman ulkoista magneettikenttää. Olkoot $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ sellaiset, että $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ ja $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, +1\}$.

(a) Osoita, että kun $N > \max\{|x_1|, |x_n|\}$, ehdolliset todennäköisyydet

$$\mathsf{P}_{N,\beta}\Big[\sigma_{x_j} = \epsilon_j \text{ kaikilla } j = 2, 3, \ldots, n-1 \,\Big|\, \sigma_{x_1} = \epsilon_1,\ \sigma_{x_n} = \epsilon_n\Big]$$

eivät riipu luvusta N.

(b) Osoita, että on olemassa raja-arvo

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,\beta}\left[\sigma_{x_j} = \epsilon_j \text{ kaikilla } j = 1, 2, \ldots, n\right].$$

Vihje. Voit käyttää hyväksesi aiempien tehtävien tuloksia.

(c) Päättele, että todennäköisyysmitat $\mathsf{P}_{N,\beta}$ suppenevat heikosti kohti jotakin todennäköisyysmittaa avaruudella $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$.

Exercises in English on the other side.

Exercise 1. Consider self-avoiding walks on the square lattice $\mathbb{Z}^2$. Recall that $\mu = \lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{c_N} = \lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{h_N} = \lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{b_N}$. Prove that $\mu \geq 2.101$.

Exercise 2. Define $G_{\mathcal{C}}(z) = \sum_{N=0}^{\infty} c_N z^N$. Assuming $c_N = \mu^N N^{\gamma-1+o(1)}$ as $N \to \infty$, where $\gamma \geq 1$, show that as $z \nearrow z_c = \frac{1}{\mu}$ we have

$$\frac{\log\left(G_{\mathcal{C}}(z)\right)}{\log(z_c - z)} \longrightarrow -\gamma.$$

Hint. You can start by estimating $\sum_{N=0}^{\infty} e^{-N\delta} N^{\alpha} \leq e^{\delta} \int_0^{\infty} e^{-x\delta} x^{\alpha} \, \mathrm{d}x$, for $\alpha \geq 0$ ja $\delta > 0$.

Exercise 3. Let S be a finite or countable set. Define $\varrho \colon S^{\mathbb{N}} \times S^{\mathbb{N}} \to [0, \infty)$ by the formula

$$\varrho(\omega, \omega') = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ \omega_i \neq \omega'_i}} 2^{-i} \qquad \text{kun } \omega, \omega' \in S^{\mathbb{N}},\ \omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}},\ \omega' = (\omega'_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Show that ϱ is a metric on the set $S^{\mathbb{N}}$, and that the metric space $(S^{\mathbb{N}}, \varrho)$ is complete and separable.

Exercise 4. Consider the Ising model on $[\![-N, N]\!]$ with periodic boundary conditions, without external magnetic field. Denote the corresponding Boltzmann distribution by $\mathsf{P}_{N,\beta}$. Show that for any $i, j \in \mathbb{Z}$ we have

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,\beta}[\sigma_i = \sigma_j] = \frac{1}{2}\left(1 + (\tanh\beta)^{|i-j|}\right)$$

Does the limit depend on boundary conditions?

Exercise 5. Consider, as in exercise 4, the Ising model on $[\![-N, N]\!]$ with periodic boundary conditions and without external magnetic field. Let $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ be such that $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, and $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, +1\}$.

(a) Show that when $N > \max\{|x_1|, |x_n|\}$, the conditional probabilities

$$\mathsf{P}_{N,\beta}\left[\sigma_{x_j} = \epsilon_j \text{ fo all } j = 2, 3, \ldots, n-1 \,\middle|\, \sigma_{x_1} = \epsilon_1,\ \sigma_{x_n} = \epsilon_n\right]$$

do not depend on N.

(b) Show that the following limit exists

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}_{N,\beta}\left[\sigma_{x_j} = \epsilon_j \text{ for all } j = 1, 2, \ldots, n\right].$$

Hint. You are allowed to exploit the results of earlier exercises.

(c) Conclude that the probability measures $\mathsf{P}_{N,\beta}$ converge weakly to some probability measure on $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$.

Suomenkieliset tehtävät toisella puolella.