Todennäköisyys ja statistinen fysiikka **Harjoitukset 5**
Kevät 2014 **20.2.2014**

Tehtävä 1. Olkoon $M_n = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_k p_k = 1, p_k > 0, \forall k\}$. Oletetaan, että funktiot $S_n : M_n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, ovat symmetrisiä ja toteuttavat seuraavat ehdot

(1) $S_2(1/2, 1/2) = \log 2$ ja $p \mapsto S_2(p, 1-p)$ on jatkuva
(2) Jono $A_n := S_n(1/n, \dots, 1/n)$ on ei-vähenevä.
(3) Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $m \geq 2$, kun merkitään $\hat{p}_k = p_k/(p_1 + \dots + p_m)$, pätee

$$S_n(p_1, \dots, p_n) = S_{n-m+1}\Big((\sum_{j=1}^{m} p_j), p_{m+1} \dots, p_n\Big) + (\sum_{j=1}^{m} p_j) S_m(\hat{p}_1 \dots, \hat{p}_m).$$

Osoita, että $S_n(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k$

Tehtävä 2 (Subadditiivisen yleistetyn jonon suppeneminen)**.** Olkoot $a(\underline{n}) = a(n_1, \dots, n_d)$ reaalilukuja kaikilla kokonaisluvuilla $n_i \geq 1$ ja oletetaan, että tämä yleistetty jono toteuttaa kaikilla indeksin i arvoilla subadditiivisuusehdon

$$a(\dots, n_i + m_i, \dots) \leq a(\dots, n_i, \dots) + a(\dots, m_i, \dots),$$

missä osat "$\dots$" ovat samat eri termeissä. Osoita, että

$$\lim_{\underline{n} \to \infty} \frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_d} a(\underline{n}) = \inf_{\underline{n}} \frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_d} a(\underline{n}).$$

Huomautus. Tässä $\lim_{\underline{n} \to \infty}$ voidaan valita, joko niin, että otetaan jonot $(n_i(k))_{k \geq 1}$ siten, että jokaisella i jono $n_i(k) \to \infty$, kun $k \to \infty$, tai niin, että n_i:t viedään yksitellen äärettömään. Raja on riippumaton tästä valinnasta.

Tehtävä 3. Olkoon $G = (V, E)$ graafi ja $\Omega = \{-1, +1\}^V$. Määritellään Hamiltonin funktio asettamalla kaikilla $\underline{\sigma} \in \Omega$

$$H^{\star}_{B^{\star}}(\underline{\sigma}) = \sum_{\{v,w\} \in E} (\sigma_v - \sigma_w)^2 + \sum_{v \in V} (\sigma_v - B^{\star})^2$$

(a) Etsi vakiot E_0, c, k siten, että Isingin mallin Hamiltonin funktio H_B toteuttaa $H_B = E_0 + c H^{\star}_{kB}$.

(b) Kun $G = [\![1, N]\!]^d$, merkitään näitä Hamiltonin funktioita $H_{N,B}$ ja $H^{\star}_{N,B^{\star}}$ ja vastaavia partitiofunktiota $Z_{N,B}$ ja $Z^{\star}_{N,B^{\star}}$. Käyttäen subadditiivisen yleistetyn jonon suppenemista osoita, että jonot $N^{-d} \log Z_{N,B}$ ja $N^{-d} \log Z^{\star}_{N,B^{\star}}$ suppenevat, kun $N \to \infty$.

Tehtävä 4. Olkoon c_N neliöhilalla $\mathbb{Z}^2$ origosta lähtevien N askeleen itseään välttävien kävelyjen lukumäärä. Laske c_N, kun $N \leq 5$. Käyttäen hyväksi laskemiasi arvoja, päättele, että $c_N \leq 3.096^N$ kaikilla $N \geq 5$, ja että $c_N \leq 2.922^N$ tarpeeksi suurilla N.

Tehtävä 5. Olkoot $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{X}'$ kaksi riippumatonta origosta lähtevää N askeleen itseään välttävää satunnaiskävelyä $\mathbb{Z}^d$:lla. Olettaen, että $c_N = \mu^N N^{\gamma - 1 + o(1)}$, osoita seuraava keskinäisen välttelyn todennäköisyyksien asymptotiikka

$$\mathsf{P}[\mathbf{X} \cap \mathbf{X}' = \{\underline{0}\}] = N^{1-\gamma+o(1)}.$$

Exercises in English on the other side.

Exercise 1. Let $M_n = \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_k p_k = 1, p_k > 0, \forall k\}$. Suppose that functions $S_n : M_n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, are symmetric and satisfy

(1) $S_2(1/2, 1/2) = \log 2$, and $p \mapsto S_2(p, 1-p)$ is continuous.
(2) The sequence $A_n := S_n(1/n, \ldots, 1/n)$ is non-decreasing.
(3) For all $n \in \mathbb{N}$ and $m \geq 2$, with $\hat{p}_k = p_k/(p_1 + \ldots + p_m)$, we have

$$S_n(p_1, \ldots, p_n) = S_{n-m+1}\big((\sum_{j=1}^{m} p_j), p_{m+1} \ldots, p_n\big) + (\sum_{j=1}^{m} p_j) S_m(\hat{p}_1 \ldots, \hat{p}_m).$$

Show that $S_n(p_1, \ldots, p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k$.

Exercise 2 (Limit of subadditive generalized sequence)**.** Suppose that $a(\underline{n}) = a(n_1, \ldots, n_d)$ are real numbers, for all integers $n_i \geq 1$, and that this generalized sequence satisfies for all index values i the subadditivity condition

$$a(\ldots, n_i + m_i, \ldots) \leq a(\ldots, n_i, \ldots) + a(\ldots, m_i, \ldots),$$

where "…" are unchanged in all terms. Show that

$$\lim_{\underline{n}\to\infty} \frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_d} a(\underline{n}) = \inf_{\underline{n}} \frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_d} a(\underline{n}).$$

Remark. Here $\lim_{\underline{n}\to\infty}$ can be understood either by taking sequences $(n_i(k))_{k\geq 1}$ such that for each i $n_i(k) \to \infty$ as $k \to \infty$, or by successively taking each n_i to infinity. The limit does not depend on the interpretation.

Exercise 3. Let $G = (V, E)$ be a graph and $\Omega = \{-1, +1\}^V$. Define a Hamiltonian function by setting, for each $\underline{\sigma} \in \Omega$,

$$H^{\star}_{B^{\star}}(\underline{\sigma}) = \sum_{\{v,w\}\in E} (\sigma_v - \sigma_w)^2 + \sum_{v\in V} (\sigma_v - B^{\star})^2$$

(a) Find constants E_0, c, k so that the Ising model Hamiltonian H_B satisfies $H_B = E_0 + cH^{\star}_{kB}$.

(b) In the case $G = [\![1, N]\!]^d$, denote these Hamiltonians by $H_{N,B}$ and $H^{\star}_{N,B^{\star}}$, and the corresponding partition functions by $Z_{N,B}$ and $Z^{\star}_{N,B^{\star}}$. Using the convergence of subadditive generalized sequences, show that the sequences $N^{-d} \log Z_{N,B}$ and $N^{-d} \log Z^{\star}_{N,B^{\star}}$ have limits as $N \to \infty$.

Exercise 4. Let c_N be the number of N step self-avoiding walks starting from the origin on the square lattice $\mathbb{Z}^2$. Compute c_N for $N \leq 5$. Using the values you computed, show that $c_N \leq 3.096^N$ for all $N \geq 5$, and that $c_N \leq 2.922^N$ for large enough N.

Exercise 5. Let $\mathbf{X}$ and $\mathbf{X}'$ be two independent N step self-avoiding random walks on $\mathbb{Z}^d$, started from the origin. Assuming $c_N = \mu^N N^{\gamma-1+o(1)}$, show the following asymptotic formula for the mutual avoidance probabilities

$$\mathsf{P}\left[\mathbf{X} \cap \mathbf{X}' = \{\underline{0}\}\right] = N^{1-\gamma+o(1)}.$$

Suomenkieliset tehtävät toisella puolella.