Todennäköisyys ja statistinen fysiikka **Harjoitukset 3**
Kevät 2014 **6.2.2014**

Tehtävä 1. $P \sim \text{Poisson}(\lambda)$ tarkoittaa $\mathsf{P}[P = k] = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
(a) Olkoot P_1, P_2 kaksi riippumatonta Poisson-jakautunutta satunnaismuuttujaa, $P_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ ja $P_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$. Osoita, että $P_1 + P_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
(b) Olkoot $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ riippumattomia ja samoin jakautuneita, $X_j \sim \text{Poisson}(1)$, ja $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Osoita, että kun $a > 1$, on voimassa seuraava suurten poikkeamien tahti

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathsf{P}[S_n \geq na] = -a + 1 + a \log a.$$

Tehtävä 2. Olkoot $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ riippumattomia, $X_j \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, ja $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.
(a) Osoita, että kaikilla $x > 0$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \leq \int_x^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y \leq \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(b) Kun $a > \mu$, laske seuraava suurten poikkeamien tahtifunktio

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathsf{P}[S_n \geq na].$$

Tehtävä 3. Olkoon $S = (S_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ satunnaiskävely $\mathbb{Z}$:lla parametrilla $0 < p < 1$, eli $\mathsf{P}[S_t - S_{t-1} = +1] = p$ ja $\mathsf{P}[S_t - S_{t-1} = -1] = 1 - p$. Olkoot $a < b$ kokonaislukuja ja olkoot satunnaismuuttujat $\tau_{\{a,b\}}$ ja $\tau_{\{b\}}$ satunnaiskävelyn poistumisajat väleiltä $[\![a, b]\!]$ ja $[\![-\infty, b]\!]$, vastaavasti, eli $\tau_{\{b\}} = \inf\{t \geq 0 \,|\, S_t = b\}$ ja $\tau_{\{a,b\}} = \inf\{t \geq 0 \,|\, S_t = a \text{ tai } S_t = b\}$.

(a) Osoita, että kaikilla $x \in [\![a, b]\!]$ pätee $\mathsf{E}[\tau_{\{a,b\}} \,|\, S_0 = x] < \infty$.
(b) Laske ensimmäisen askeleen analyysin avulla $\mathsf{E}[\tau_{\{a,b\}} \,|\, S_0 = x]$, kun $p = 1/2$.
(c) Osoita, että kaikilla $x < b$ pätee $\mathsf{P}[\tau_{\{b\}} < \infty \,|\, S_0 = x] = 1$, kun $p \geq 1/2$.

Tehtävä 4. Olkoon $T \in \mathbb{N}$ satunnaismuuttuja, jonka jakauma on $\mathsf{P}[T = k] = \frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k} 2^{-2k}$. Osoita, että $\mathsf{E}[T^\alpha] < \infty$, kun $\alpha < 1/2$, ja $\mathsf{E}[T^\alpha] = \infty$, kun $\alpha \geq 1/2$.

Tehtävä 5. Olkoon $S = (S_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ yksinkertainen satunnaiskävely neliöhilalla $\mathbb{Z}^2$, eli $S_t = \sum_{k=1}^t \xi_k$, missä askeleet $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita,

$$\mathsf{P}\big[\xi_k = \underline{e}_1\big] = \mathsf{P}\big[\xi_k = -\underline{e}_1\big] = \mathsf{P}\big[\xi_k = \underline{e}_2\big] = \mathsf{P}\big[\xi_k = -\underline{e}_2\big] = \frac{1}{4}, \quad \text{missä } \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Merkitään S:n koordinaattiprosesseja X:llä ja Y:llä — siten, että

$$S_t = \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix}.$$

(a) Osoita, että prosessit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ja $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eivät ole keskenään riippumattomat.
(b) Asetetaan $U_t = X_t + Y_t$ ja $V_t = X_t - Y_t$. Osoita, että prosessit $U = (U_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ja $V = (V_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ovat keskenään riippumattomat ja molempien jakauma on yksinkertainen 1-ulotteinen satunnaiskävely $\mathbb{Z}$:lla.

Exercises in English on the other side.

Exercise 1. Recall that $P \sim \text{Poisson}(\lambda)$ signifies $\mathsf{P}[P = k] = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ for all $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
(a) Let P_1, P_2 be two independent Poisson distributed random variables, $P_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ and $P_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$. Show that $P_1 + P_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
(b) Let $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ be independent, $X_j \sim \text{Poisson}(1)$, and $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Show that, when $a > 1$, the following rate of large deviations holds

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathsf{P}[S_n \geq na] = -a + 1 + a \log a.$$

Exercise 2. Let $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ be independent, $X_j \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, and $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.
(a) Show that for all $x > 0$ we have

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \leq \int_x^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y \leq \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(b) For $a > \mu$, calculate the following rate of large deviations

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathsf{P}[S_n \geq na].$$

Exercise 3. Let $S = (S_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ be a random walk on $\mathbb{Z}$ with parameter $0 < p < 1$, i.e. $\mathsf{P}[S_t - S_{t-1} = +1] = p$ and $\mathsf{P}[S_t - S_{t-1} = -1] = 1 - p$. Let $a < b$ be integers and define the random variables $\tau_{\{a,b\}}$ and $\tau_{\{b\}}$ as the exit times of the random walk from the intervals $[\![a, b]\!]$ and $[\![-\infty, b]\!]$, respectively, i.e. $\tau_{\{b\}} = \inf\{t \geq 0 \,|\, S_t = b\}$ and $\tau_{\{a,b\}} = \inf\{t \geq 0 \,|\, S_t = a \text{ or } S_t = b\}$.

(a) Show that for each $x \in [\![a, b]\!]$, we have $\mathsf{E}[\tau_{\{a,b\}} \,|\, S_0 = x] < \infty$.
(b) Use the first step analysis to calculate $\mathsf{E}[\tau_{\{a,b\}} \,|\, S_0 = x]$ when $p = 1/2$.
(c) Show that for each $x < b$, we have $\mathsf{P}[\tau_{\{b\}} < \infty \,|\, S_0 = x] = 1$, when $p \geq 1/2$.

Exercise 4. Let $T \in \mathbb{N}$ be a random variable whose distribution is given by $\mathsf{P}[T = k] = \frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}2^{-2k}$. Show that $\mathsf{E}[T^\alpha] < \infty$ for $\alpha < 1/2$, and $\mathsf{E}[T^\alpha] = \infty$ for $\alpha \geq 1/2$.

Exercise 5. Let $S = (S_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ be a simple random walk on $\mathbb{Z}^2$, that is, $S_t = \sum_{k=1}^t \xi_k$, where the steps $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ are independent and identically distributed as

$$\mathsf{P}\big[\xi_k = \underline{e}_1\big] = \mathsf{P}\big[\xi_k = -\underline{e}_1\big] = \mathsf{P}\big[\xi_k = \underline{e}_2\big] = \mathsf{P}\big[\xi_k = -\underline{e}_2\big] = \frac{1}{4}, \quad \text{where } \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Denote the coordinate processes of S by X and Y — so that

$$S_t = \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix}.$$

(a) Show that the processes $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ and $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ are not independent.
(b) Set $U_t = X_t + Y_t$ and $V_t = X_t - Y_t$. Show that the processes $U = (U_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ and $V = (V_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ are mutually independent and that both processes are distributed as one-dimensional simple random walk on $\mathbb{Z}$.

Suomenkieliset tehtävät toisella puolella.