Todennäköisyys ja statistinen fysiikka **Harjoitukset 2**
Kevät 2014 **30.1.2014**

Tehtävä 1. Olkoon σ tasaisesti jakautunut joukon $[\![1,n]\!] = \{1,2,\ldots,n\}$ permutaatio. Laske seuraavat σ:n syklihajotelmaan liittyvät suureet.[a]

(a) Olkoon L alkion 1 sisältävän syklin pituus. Mikä on L:n jakauma, eli mitkä ovat todennäköisyydet $\mathsf{P}[L = \ell]$? Laske odotusarvo $\mathsf{E}[L]$.
(b) Olkoon S syklihajotelmassa esiintyvien syklien lukumäärä. Laske $\mathsf{E}[S]$.
(c) Millä todennäköisyydellä kaksi eri alkiota kuuluvat samaan sykliin?

Tehtävä 2. Olkoot satunnaismuuttujat X_j, $j \in \mathbb{N}$, riippumattomia ja samoin jakautuneita, $X_j \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Merkitään näistä n ensimmäisen maksimia $M_n = \max_{1\le j\le n} X_j$, ja tarkastellaan siirrettyä maksimia $R_n = M_n - \frac{1}{\lambda}\log(n)$. Osoita, että satunnaismuuttujajono $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee heikosti, ja laske rajajakauman kertymäfunktio.

Tehtävä 3.
(a) Todista Chebyshevin epäyhtälö: jos $X \ge 0$ on satunnaismuuttuja, niin kaikilla positiivisilla luvuilla y pätee

$$\mathsf{P}[X \ge y] \le \frac{\mathsf{E}[X^p]}{y^p}.$$

(b) Olkoot satunnaismuuttujat X_j, $j \in \mathbb{N}$, neliöintegroituvia ja korreloitumattomia.[b] Oletetaan, että $\mathsf{E}[X_j] = \mu$ ja $\mathsf{Var}[X_j] \le C$ kaikilla j. Määritellään $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Osoita, että kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee $\mathsf{P}\left[\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| > \varepsilon\right] \to 0$, kun $n \to \infty$, johtamalla epäyhtälö

$$\mathsf{P}\left[\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| > \varepsilon\right] \le \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Tehtävä 4. Olkoot $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ja $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ riippumattomia. Osoita, että $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Tehtävä 5. Olkoot $F_n \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ kertymäfunktioita, kun $n \in \mathbb{N}$.
(a) Osoita, että jonolla $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on osajono $(F_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, joka suppenee pisteittäin kohti jotakin monotonista funktiota $F \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ kaikissa funktion F jatkuvuuspisteissä.
(b) Oletetaan lisäksi, että kertymäfunktioita F_n vastaavat todennäköisyysmitat muodostavat tiukan perheen.[c] Osoita, että kohdan (a) osajonoraja F on kertymäfunktio.
Vihje: Hoida ensin suppeneminen numeroituvassa tiheässä $\mathbb{R}$:n osajoukossa, käyttäen yksikkövälin kompaktisuutta sekä lävistäjäosajonon poimintaa.

---

[a] Muistutetaan, että permutaatio voidaan esittää erillisten syklien tulona niin, että jokainen alkio esiintyy tasan yhdessä syklissä, ja tämä syklihajotelma on yksikäsitteinen syklien järjestystä vaille.
[b] Satunnaismuuttuja X on neliöintegroituva, jos $\mathsf{E}[X^2] < \infty$. Neliöintegroituvat satunnaismuuttujat X ja Y ovat korreloitumattomia, jos $\mathsf{Cov}(X,Y) := \mathsf{E}[XY] - \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y] = 0$.
[c] Kertymäfunktiojonolle (F_n) tiukkuus tarkoittaa, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $R > 0$ siten, että kaikilla n pätee $F_n(-R) \le \varepsilon$ ja $F_n(R) \ge 1 - \varepsilon$.

Exercises in English on the other side.

Exercise 1. Let σ be a uniformly distributed random permutation of the set $[\![1,n]\!] = \{1,2,\ldots,n\}$. Compute the following quantities about the cycle decomposition of σ.[a]

(a) Let L be the length of the cycle that contains the element 1. What is the distribution of L, i.e. probabilities $\mathsf{P}[L=\ell]$? Calculate also $\mathsf{E}[L]$.

(b) Let S be the number of cycles in the cycle decomposition. Calculate $\mathsf{E}[S]$.

(c) What is the probability that two different elements belong to the same cycle?

Exercise 2. Let X_j, $j \in \mathbb{N}$, be independent identically distributed random variables with $X_j \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Denote the maximum of the first n of them by $M_n = \max_{1\leq j\leq n} X_j$, and consider the shifted maxima $R_n = M_n - \frac{1}{\lambda}\log(n)$. Prove that the sequence $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of random variables converges weakly, and calculate the cumulative distribution function of the limit.

Exercise 3.
(a) Prove the Chebyshev inequality: if $X \geq 0$ is a random variable, then for all positive y we have

$$\mathsf{P}[X \geq y] \leq \frac{\mathsf{E}[X^p]}{y^p}.$$

(b) Let X_j, $j \in \mathbb{N}$, be square integrable uncorrelated random variables.[b] Assume that $\mathsf{E}[X_j] = \mu$ and $\mathsf{Var}[X_j] \leq C$ for all j. Set $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Show that for any $\varepsilon > 0$ we have $\mathsf{P}\left[\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| > \varepsilon\right] \to 0$ as $n \to \infty$, by deriving the inequality

$$\mathsf{P}\left[\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| > \varepsilon\right] \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Exercise 4. Let $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ and $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ be independent. Show that $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Exercise 5. Let $F_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ be cumulative distribution functions, for $n \in \mathbb{N}$.
(a) Prove that the sequence $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ has a subsequence $(F_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ that converges pointwise to a monotone function $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ at all continuity points of F.
(b) Assume further that the probability measures associated to F_n constitute a tight family.[c] Prove that the subsequential limit F in part (a) is a cumulative distribution function.
Hint: First take care of the convergence in a countable dense subset of $\mathbb{R}$, by applying compactness of the unit interval and diagonal extraction.

---

[a] Recall that a permutation can be written as a composition of disjoint cycles so that each element appears in exactly one cycle, and up to the order of cycles this cycle decomposition is unique.
[b] A random variable X is square integrable if $\mathsf{E}[X^2] < \infty$. Square integrable random variables X and Y are uncorrelated if $\mathsf{Cov}(X,Y) := \mathsf{E}[XY] - \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y] = 0$.
[c] Tightness of a sequence (F_n) of c.d.f.'s amounts to the following: for all $\varepsilon > 0$ there exists $R > 0$ such that for all n we have $F_n(-R) \leq \varepsilon$ and $F_n(R) \geq 1-\varepsilon$.

Suomenkieliset tehtävät toisella puolella.