Todennäköisyys ja statistinen fysiikka **Harjoitukset 11**
Kevät 2014 **24.4.2014**

Tehtävä 1. Olkoot F_1 ja F_2 kaksi kertymäfunktiota. Oletamme, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $F_1(x) \leq F_2(x)$. Osoita, että on olemassa jakauma ν tasossa $\mathbb{R}^2$ siten, että jos $(X_1, X_2) \sim \nu$, niin melkein varmasti $X_1 \leq X_2$, ja komponenttien X_1 ja X_2 kertymäfunktiot ovat F_1 ja F_2 vastaavasti.

Tehtävä 2. Olkoon $q \in (0,1)$. Ehrenfestin uurna voidaan ajatella Markov-ketjuna $X = (X(t))_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ tila-avaruudella $\mathcal{S} = [\![0, N]\!]$ ja siirtymätodennäköisyysmatriisilla

$$P_{n,m} = \begin{cases} \frac{N-n}{N} q & \text{jos } m = n+1 \\ 1 - \frac{N-n}{N} q - \frac{n}{N}(1-q) & \text{jos } m = n \\ \frac{n}{N}(1-q) & \text{jos } m = n-1 \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}.$$

Osoita, että tämä Markov-ketju on redusoitumaton ja aperiodinen. Osoita lisäksi, että binomijakauma $\underline{b}$, komponentein $b_n = q^n (1-q)^{N-n} C_n$, missä $C_n = \binom{N}{n}$, toteuttaa "detailed balance" -ehdon. Päättele, että $\mathsf{P}[X(t) = n] \to b_n$ kun $t \to \infty$.

Tehtävä 3. Tarkastellaan edelleen Ehrenfestin uurnaa ja kiinnitetään nyt parametri $q = \frac{1}{2}$. Olkoot P, b_n ja C_n kuten edellisessä tehtävässä. Kutsumme jakaumia $\underline{p} = (p_n)_{n \in [\![0,N]\!]}$ uurnan *makroskooppisiksi jakaumiksi.* Vastaavat *mikroskooppiset jakaumat* $\underline{p}^{\text{mikro}}$ ovat jakaumat joukolla $\{0,1\}^N$, joille $p^{\text{mikro}}_{(s_1,\ldots,s_N)} = \frac{p_n}{C_n}$, missä $n = \sum_{j=1}^N s_j$ — eli kaikki tavat valita, mitkä hiukkaset ovat eri osissa, ovat yhtä todennäköisiä. Mikroskooppinen entropia määritellään mikroskooppisen jakauman entropiana $S_{\text{mikro}}(\underline{p}) = S(\underline{p}^{\text{mikro}})$.

(a) Asetetaan $Q_{n,m} = P_{n,m} \frac{C_n}{C_m}$. Osoita, että $Q_{n,m} C_m = Q_{m,n} C_n$ ja $\sum_n Q_{n,m} = 1$.

(b) Osoita entropian kasvu: millä tahansa $\underline{p}$ pätee $S_{\text{mikro}}(\underline{p}) \leq S_{\text{mikro}}(\underline{p}P)$.

Vihje. Käytä Jensenin epäyhtälöä $\sum_n Q_{n,m} \varphi(x_n) \leq \varphi(\sum_n Q_{n,m} x_n)$ konkaaville φ.

Tehtävä 4. Olkoon $X = (X(t))_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ Markov-ketju tila-avaruudella $\mathcal{S}$. Kun $x \in \mathcal{S}$, merkitsemme $T_x = \inf \{t \in \mathbb{Z}_{>0} \,|\, X(t) = x\}$ (konventiolla $\inf(\emptyset) = +\infty$). Sanomme, että tila x on *palautuva*, jos $\mathsf{P}\big[T_x < \infty \,\big|\, X(0) = x\big] = 1$.

(a) Osoita, että ainakin yksi Markov-ketjun tiloista on palautuva.

(b) Osoita, että jos x on palautuva, niin $\mathsf{E}\big[T_x \,\big|\, X(0) = x\big] < \infty$.

Tehtävä 5. Olkoon $X = (X(t))_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ Markov-ketju tila-avaruudella $\mathcal{S}$, $P \in \mathbb{R}^{\mathcal{S} \times \mathcal{S}}$ sen siirtymätodennäköisyysmatriisi, ja T_x, $x \in \mathcal{S}$ kuten edellisessä tehtävässä. Olkoon x jokin palautuva tila. Määritellään kaikilla $y \in \mathcal{S}$

$$f(y) = \sum_{t=1}^{\infty} \mathsf{P}\Big[X(t) = y \text{ ja } t \leq T_x \,\Big|\, X(0) = x\Big].$$

(a) Osoita, että kaikilla $z \in \mathcal{S}$ pätee $\sum_{y \in \mathcal{S}} f(y) P_{y,z} = f(z)$.

(b) Päättele, että $\pi_y = \frac{f(y)}{\mathsf{E}[T_x \,|\, X(0) = x]}$ määrittelee stationaarisen jakauman $\underline{\pi} = (\pi_y)_{y \in \mathcal{S}}$.

Exercises in English on the other side.

Exercise 1. Let F_1 and F_2 be two cumulative distribution functions (CDF). Assume that $F_1(x) \leq F_2(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$. Show that there exists a probability distribution ν on the plane $\mathbb{R}^2$ such that if $(X_1, X_2) \sim \nu$, then almost surely $X_1 \leq X_2$ and CDF's of the components X_1 and X_2 are F_1 and F_2, respectively.

Exercise 2. Let $q \in (0,1)$. The Ehrenfest urn can be thought as a Markov chain $X = (X(t))_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ on the state space $\mathcal{S} = [\![0, N]\!]$ with the transition matrix

$$P_{n,m} = \begin{cases} \frac{N-n}{N} q & \text{if } m = n+1 \\ 1 - \frac{N-n}{N} q - \frac{n}{N}(1-q) & \text{if } m = n \\ \frac{n}{N}(1-q) & \text{if } m = n-1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}.$$

Show that this Markov chain is irreducible and aperiodic. Show also that the binomial distribution $\underline{b}$, whose components are $b_n = q^n (1-q)^{N-n} C_n$, where $C_n = \binom{N}{n}$, satisfies the "detailed balance" condition. Deduce that $\mathsf{P}[X(t) = n] \to b_n$ as $t \to \infty$.

Exercise 3. Let's consider the Ehrenfest urn and fix the parameter $q = \frac{1}{2}$. Let P, b_n and C_n be as in the previous exercise. We call distributions $\underline{p} = (p_n)_{n \in [\![0,N]\!]}$ the *macroscopic distributions* of the urn. The corresponding *microscopic distributions* $\underline{p}^{\text{micro}}$ are probability distributions on the set $\{0,1\}^N$, for which $p^{\text{micro}}_{(s_1,\ldots,s_N)} = \frac{p_n}{C_n}$, where $n = \sum_{j=1}^N s_j$ — that is, all the ways to choose, which particles are in which urn, are equally probable. The microscopic entropy is defined as the entropy of the microscopic distribution $S_{\text{micro}}(\underline{p}) = S(\underline{p}^{\text{micro}})$.

(a) Set $Q_{n,m} = P_{n,m} \frac{C_n}{C_m}$. Show that $Q_{n,m} C_m = Q_{m,n} C_n$ and $\sum_n Q_{n,m} = 1$.

(b) Show that the entropy is increasing: for any $\underline{p}$, $S_{\text{micro}}(\underline{p}) \leq S_{\text{micro}}(\underline{p}P)$.

Hint. Use Jensen's inequality $\sum_n Q_{n,m} \varphi(x_n) \leq \varphi(\sum_n Q_{n,m} x_n)$ for a concave φ.

Exercise 4. Let $X = (X(t))_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ be a Markov chain on a state space $\mathcal{S}$. For $x \in \mathcal{S}$, we denote $T_x = \inf\{t \in \mathbb{Z}_{>0} \,|\, X(t) = x\}$ (with the convention that $\inf(\emptyset) = +\infty$). We call the state x *recurrent*, if $\mathsf{P}\big[T_x < \infty \,\big|\, X(0) = x\big] = 1$.

(a) Prove that at least one of the states of a Markov chain is recurrent.

(b) Prove that if x is recurrent, then $\mathsf{E}\big[T_x \,\big|\, X(0) = x\big] < \infty$.

Exercise 5. Let $X = (X(t))_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ be a Markov chain on the state space $\mathcal{S}$, let $P \in \mathbb{R}^{\mathcal{S} \times \mathcal{S}}$ be its transition probability matrix, and T_x, $x \in \mathcal{S}$ as in the previous exercise. Let x be some recurrent state. Define for all $y \in \mathcal{S}$

$$f(y) = \sum_{t=1}^{\infty} \mathsf{P}\Big[X(t) = y \text{ ja } t \leq T_x \,\Big|\, X(0) = x\Big].$$

(a) Show that for all $z \in \mathcal{S}$ we have $\sum_{y \in \mathcal{S}} f(y) P_{y,z} = f(z)$.

(b) Deduce that $\pi_y = \frac{f(y)}{\mathsf{E}[T_x \,|\, X(0)=x]}$ defines a stationary distribution $\underline{\pi} = (\pi_y)_{y \in \mathcal{S}}$.

Suomenkieliset tehtävät toisella puolella.