Todennäköisyys ja statistinen fysiikka **Harjoitukset 10**
Kevät 2014 **10.4.2014**

Tehtävä 1. Olkoon $K > 0$ ja $K^* > 0$ siten, että $e^{-2K^*} = \tanh(K)$. Osoita, että $\sinh(2K)\sinh(2K^*) = 1$ ja $\cosh(2K^*) = \coth(2K)$.

Tehtävä 2. Olkoon $A, A^\dagger$ lineaarikuvauksia epätriviaalilla vektoriavaruudella V, jotka toteuttavat

$$A\,A^\dagger - A^\dagger\,A = I,$$

missä I on avaruuden V identiteettikuvaus. Osoita, että V ei voi olla äärellisdimensioinen.
Vihje. Yritä käyttää sopivaa matriisien piirrettä, joka on $A\,A^\dagger$:lle ja $A^\dagger\,A$:lle sama.

Tehtävä 3. Olkoon V vektoriavaruus, $(\mathfrak{a}_i)_{i\in[\![1,d]\!]}$ ja $(\mathfrak{a}_i^\dagger)_{i\in[\![1,d]\!]}$ lineaarikuvauksia $V \to V$ ja $\mathfrak{v}_0 \in V$ vektori, $\mathfrak{v}_0 \neq \underline{0}$, jotka toteuttavat kanoniset kommutaatiorelaatiot ja vakuumiominaisuuden, eli

$$\forall i,j:\quad [\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_j] = 0, \quad [\mathfrak{a}_i^\dagger,\mathfrak{a}_j^\dagger] = 0, \quad [\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_j^\dagger] = \delta_{i,j}\,\mathrm{id}_V, \qquad \forall i:\quad \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{v}_0 = 0.$$

Määritellään $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{a}_i^\dagger\mathfrak{a}_i$ ja $\mathfrak{v}_{(n_i)} = \mathfrak{v}_{(n_i)_{i\in[\![1,d]\!]}} = (\mathfrak{a}_1^\dagger)^{n_1}\,(\mathfrak{a}_2^\dagger)^{n_2}\ldots(\mathfrak{a}_d^\dagger)^{n_d}\,\mathfrak{v}_0$, missä $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\forall\ i \in [\![1,d]\!]$. Osoita, että $\mathfrak{v}_{(n_i)} \neq \underline{0}$ ja että $\mathfrak{N}_j\mathfrak{v}_{(n_i)} = n_j\mathfrak{v}_{(n_i)}$. Päättele, että $\{\mathfrak{v}_{(n_i)_{i\in[\![1,d]\!]}} : n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall\, i \in [\![1,d]\!]\}$ on lineaarisesti riippumaton joukko vektoreita.

Tehtävä 4. Tarkastellaan kaksiulotteista anisotrooppista Isingin mallia suorakaiteella $[\![1,M]\!] \times [\![1,N]\!]$ parametreilla K_1, K_2, h molempiin suuntiin periodisilla reunaehdoilla.[a] Olkoon $(\sigma_{(x,y)})_{x\in[\![1,M]\!],y\in[\![1,N]\!]}$ tämän Isingin mallin tila eli spinkofiguraatio. Olkoon $T : \mathbb{C}^{2^M} \to \mathbb{C}^{2^M}$ mallin symmetrisoitu siirtomatriisi $T = (V_2\,V_3)^{\frac{1}{2}}\,V_1\,(V_2\,V_3)^{\frac{1}{2}}$. Osoita, että kun $1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n \leq N$ ja $x_k \in [\![1,M]\!]$,

$$\mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{n}\sigma_{(x_j,y_j)}\right] = \frac{\mathrm{Tr}\left(T^{y_1}\,\tau_{x_1}^z\,T^{y_2-y_1}\,\tau_{x_2}^z\,T^{y_3-y_2}\,\tau_{x_3}^z\,\ldots\,\tau_{x_{n-1}}^z\,T^{y_n-y_{n-1}}\,\tau_{x_n}^z\,T^{N-y_n}\right)}{\mathrm{Tr}\left(T^N\right)}.$$

Tehtävä 5. Olkoon $C_m, C_m^\dagger$, $m \in [\![1,M]\!]$, lineaarisia kuvauksia vektoriavaruudella V ja oletetaan, että ne toteuttavat kanonisiset antikommutaatiorelaatiot:

$$[C_m, C_{m'}]_+ = 0 = [C_m^\dagger, C_{m'}^\dagger]_+, \qquad [C_m, C_{m'}^\dagger]_+ = \delta_{m,m'}I.$$

Olkoon $(U_{j,m})_{(j,m)\in[\![1,M]\!]^2}$ unitaarinen, eli pätee $U^* = U^{-1}$, missä U^* on U:n adjungaatti- ja U^{-1} on U:n käänteismatriisi. Määritellään $\gamma_j = \sum_{m=1}^{M} U_{j,m}C_m$ ja $\gamma_j^\dagger = \sum_{m=1}^{M}\overline{U}_{j,m}C_m^\dagger$.
(a) Osoita, että näin määritellyt lineaarikuvaukset $\gamma_j, \gamma_j^\dagger$, $j \in [\![1,M]\!]$, toteuttavat kanonisiset antikommutaatiorelaatiot: $[\gamma_j, \gamma_{j'}]_+ = 0 = [\gamma_j^\dagger, \gamma_{j'}^\dagger]_+$, $[\gamma_j, \gamma_{j'}^\dagger]_+ = \delta_{j,j'}I$.
(b) Etsi matriisit $(V_{m,j})_{(m,j)\in[\![1,M]\!]^2}$ ja $(W_{m,j})_{(m,j)\in[\![1,M]\!]^2}$ siten, että $C_m = \sum_{j=1}^{M} V_{m,j}\gamma_j$ ja $C_m^\dagger = \sum_{j=1}^{M} W_{m,j}\gamma_j^\dagger$.

[a] Kaikki oletukset ovat kuten luennoillakin.

Exercises in English on the other side.

Exercise 1. Let $K > 0$ and $K^* > 0$ be such that $e^{-2K^*} = \tanh(K)$. Show that $\sinh(2K)\sinh(2K^*) = 1$ and $\cosh(2K^*) = \coth(2K)$.

Exercise 2. Let $A, A^\dagger$ be linear mappings $V \to V$ on a non-trivial vector space V and assume that they satisfy

$$A\,A^\dagger - A^\dagger\,A = I,$$

where I is the identity mapping of V. Show that V is infinite dimensional.
Hint. Try to use suitable feature of matrices, which would be the same for $A\,A^\dagger$ and $A^\dagger\,A$.

Exercise 3. Suppose that V is a vector space, $(\mathfrak{a}_i)_{i\in[\![1,d]\!]}$ and $(\mathfrak{a}_i^\dagger)_{i\in[\![1,d]\!]}$ linear mappings $V \to V$ and $\mathfrak{v}_0 \in V$ is a vector, $\mathfrak{v}_0 \neq \underline{0}$, which satisfy the canonical commutation relations and the vacuum property, that is,

$$\forall i,j: \quad [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j] = 0, \quad [\mathfrak{a}_i^\dagger, \mathfrak{a}_j^\dagger] = 0, \quad [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j^\dagger] = \delta_{i,j}\,\mathrm{id}_V, \qquad \forall i: \quad \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{v}_0 = 0.$$

Define $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{a}_i^\dagger \mathfrak{a}_i$ and $\mathfrak{v}_{(n_i)} = \mathfrak{v}_{(n_i)_{i\in[\![1,d]\!]}} = (\mathfrak{a}_1^\dagger)^{n_1}\,(\mathfrak{a}_2^\dagger)^{n_2}\ldots(\mathfrak{a}_d^\dagger)^{n_d}\,\mathfrak{v}_0$, where $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\forall\, i \in [\![1,d]\!]$. Show that $\mathfrak{v}_{(n_i)} \neq \underline{0}$ and that $\mathfrak{N}_j \mathfrak{v}_{(n_i)} = n_j \mathfrak{v}_{(n_i)}$. Deduce that $\{\mathfrak{v}_{(n_i)_{i\in[\![1,d]\!]}} : n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall\, i \in [\![1,d]\!]\}$ is a linearly independent set of vectors.

Exercise 4. Consider two-dimensional anisotropic Ising model on the rectangle $[\![1,M]\!] \times [\![1,N]\!]$ with parameters K_1, K_2, h and with periodic boundary conditions in both directions.[a] Let $(\sigma_{(x,y)})_{x\in[\![1,M]\!], y\in[\![1,N]\!]}$ be the state (or spin configuration) of this Ising model. Let $T : \mathbb{C}^{2^M} \to \mathbb{C}^{2^M}$ be the symmetrized transfer matrix $T = (V_2\,V_3)^{\frac{1}{2}}\,V_1\,(V_2\,V_3)^{\frac{1}{2}}$. Show that when $1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n \leq N$ and $x_k \in [\![1,M]\!]$,

$$\mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{n} \sigma_{(x_j,y_j)}\right] = \frac{\mathrm{Tr}\left(T^{y_1}\,\tau^z_{x_1}\,T^{y_2-y_1}\,\tau^z_{x_2}\,T^{y_3-y_2}\,\tau^z_{x_3}\,\cdots\,\tau^z_{x_{n-1}}\,T^{y_n-y_{n-1}}\,\tau^z_{x_n}\,T^{N-y_n}\right)}{\mathrm{Tr}\left(T^N\right)}.$$

Exercise 5. Let $C_m, C_m^\dagger$, $m \in [\![1,M]\!]$, be linear mappings on a vector space V and assume that they satisfy the canonical anticommutation relations:

$$[C_m, C_{m'}]_+ = 0 = [C_m^\dagger, C_{m'}^\dagger]_+, \qquad [C_m, C_{m'}^\dagger]_+ = \delta_{m,m'} I.$$

Let $(U_{j,m})_{(j,m)\in[\![1,M]\!]^2}$ be a unitary matrix, that is $U^* = U^{-1}$, where U^* is the conjugate transpose of U and U^{-1} is the inverse of U. Define $\gamma_j = \sum_{m=1}^M U_{j,m} C_m$ and $\gamma_j^\dagger = \sum_{m=1}^M \overline{U}_{j,m} C_m^\dagger$.
(a) Show that these linear mappings $\gamma_j, \gamma_j^\dagger$, $j \in [\![1,M]\!]$, satisfy the canonical anticommutation relations: $[\gamma_j, \gamma_{j'}]_+ = 0 = [\gamma_j^\dagger, \gamma_{j'}^\dagger]_+$, $[\gamma_j, \gamma_{j'}^\dagger]_+ = \delta_{j,j'} I$.
(b) Find matrices $(V_{m,j})_{(m,j)\in[\![1,M]\!]^2}$ and $(W_{m,j})_{(m,j)\in[\![1,M]\!]^2}$ such that $C_m = \sum_{j=1}^M V_{m,j}\gamma_j$ and $C_m^\dagger = \sum_{j=1}^M W_{m,j}\gamma_j^\dagger$.

[a] All the assumptions are the same as in the lectures.

Suomenkieliset tehtävät toisella puolella.