Tehtävä 1. Olkoon N satunnaismuuttuja, jonka mahdolliset arvot ovat luonnollisia lukuja. Osoita, että

(a)
$$\mathsf{P}[N > 0] \leq \mathsf{E}[N]$$

(b)
$$\mathsf{E}[N] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}[N \geq n] \,.$$

Tehtävä 2. Tarkastellaan Ehrenfestin uurnaa parametrilla q ja hiukkasten kokonaismäärällä N (kts. Luku I.1) — tässä tehtävässä lasketaan sen stationaarinen jakauma.

Satunnaismuuttuja N_A on osassa A olevien hiukkasten lukumäärä ja sen jakaumaa merkitään $\mathsf{P}[N_A = n] = p_n$, missä $p_n = 0$ jos $n \notin [\![0, N]\!]$. Yhden dynaamisen askeleen jälkeen vastaava satunnaismuuttuja on N'_A, jonka jakauma siis on

$$\mathsf{P}[N'_A = n] = q\frac{N-n+1}{N}p_{n-1} + (1-q)\frac{n+1}{N}p_{n+1} + \left(1 - q\frac{N-n}{N} - (1-q)\frac{n}{N}\right)p_n.$$

Osoita, että satunnaismuuttujien N_A ja N'_A jakaumat ovat samat eli $\mathsf{P}[N_A = n] = \mathsf{P}[N'_A = n]$ kaikilla n, jos ja vain jos

$$p_n = \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n}.$$

Tehtävä 3. Olkoon $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (normaalijakautunut reaalinen satunnaismuuttuja odotusarvolla $\mu \in \mathbb{R}$ ja varianssilla $\sigma^2 > 0$). Laske X:n karakteristinen funktio

$$\chi(\theta) = \mathsf{E}\left[e^{\mathrm{i}\theta X}\right].$$

Varoitus: Saattaa sisältää kompleksianalyysiä.

Tehtävä 4. Tapahtumajonon $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ yläraja-arvo määritellään

$$\limsup(E_n) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} E_n \,.$$

Todista ensimmäinen Borel-Cantelli Lemma: Jos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{P}[E_n] < \infty \,,$$

niin melkein varmasti vain äärellisen moni E_n tapahtuu eli

$$\mathsf{P}[\limsup(E_n)] = 0 \,.$$

Tehtävä 5. Todista Stirlingin kaava:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad \text{eli} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1 \,.$$

Vihje: Käytä Γ-funktion integraaliesitystä, jonka mukaan $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercises in English on the other side.

Exercise 1. Let N be a random variable taking values in the set of natural numbers. Show that

(a)
$$\mathsf{P}[N > 0] \le \mathsf{E}[N]$$

(b)
$$\mathsf{E}[N] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}[N \ge n] \,.$$

Exercise 2. Consider the Ehrenfest urn with parameter q and total number of particles N — the goal of the present exercise is to compute its stationary distribution.

The random variable N_A represents the number of particles in part A of the container, and for its distribution we use the notation $\mathsf{P}[N_A = n] = p_n$, where $p_n = 0$ if $n \notin [\![0, N]\!]$. After a step of the dynamics, the corresponding random variable is N'_A, whose distribution is

$$\mathsf{P}[N'_A = n] = q\frac{N-n+1}{N}p_{n-1} + (1-q)\frac{n+1}{N}p_{n+1} + \left(1 - q\frac{N-n}{N} - (1-q)\frac{n}{N}\right)p_n.$$

Show that the distributions of N_A and N'_A are the same, meaning $\mathsf{P}[N_A = n] = \mathsf{P}[N'_A = n]$ for all n, if and only if

$$p_n = \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n}.$$

Exercise 3. Let $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (real Gaussian random variable with mean $\mu \in \mathbb{R}$ and variance $\sigma^2 > 0$). Calculate the characteristic function of X,

$$\chi(\theta) = \mathsf{E}\left[e^{\mathrm{i}\theta X}\right].$$

Warning: May contain complex analysis.

Exercise 4. The limit superior of a sequence of events $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is defined by

$$\limsup(E_n) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\ge N} E_n \,.$$

Prove the first Borel-Cantelli Lemma: If

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{P}[E_n] < \infty \,,$$

then almost surely only finitely many of E_n occur, that is

$$\mathsf{P}[\limsup(E_n)] = 0 \,.$$

Exercise 5. Prove the Stirling formula:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad \text{, i.e.,} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1 \,.$$

Hint: Use the integral representation of the Γ-function, $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Suomenkieliset tehtävät toisella puolella.