3.2. Diffuusioiden infinitesimaaliset generaattorit

Aloitetaan jälleen tehtävällä.

Tehtävä III.9. Olkoon $B = (B_t)_{t\geq 0}$ standardi Brownin liike $\mathbb{R}$:llä. Merkitään satunnaismuuttujan $B_t \sim \mathrm{N}(0,t)$ tiheysfunktiota $p_t \colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$.

(a) Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota $(t,x) \mapsto p_t(x)$. Osoita, että se toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön $\frac{\partial}{\partial t} p_t(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t(x)$.

(b) Määritellään d-ulotteinen standardi Brownin liike $(\underline{B}_t)_{t\in[0,\infty)}$ asettamalla

$$\underline{B}_t = B_t^{(1)}\underline{e}_1 + \cdots + B_t^{(d)}\underline{e}_d,$$

missä komponentit $B^{(1)}, \ldots, B^{(d)}$ ovat riippumattomia standardeja Brownin liikkeitä $\mathbb{R}$:llä. Olkoon $p_t \colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ satunnaisvektorin $\underline{B}_t$ tiheysfunktio. Osoita, että

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x_1,\ldots,x_d) = \frac{1}{2}\Delta p_t(x_1,\ldots,x_d), \quad \text{missä } \Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \qquad \text{(“lämpöyhtälö”)}$$

Tämän tehtävän tulos kannattaa ymmärtää analogiana yhtälölle (III.17): d-ulotteisen Brownin liikkeen infinitesimaalinen generaattori on $\frac{1}{2}\Delta$ (missä Δ on Laplacen operaattori), ja tämä infinitesimaalinen generaattori antaa prosessin tilojen todennäköisyyksien aikaderivaatan.

Keskitymme tarkemmin yksiulotteiseen Brownin liikkeeseen notaation yksinkertaistamiseksi. Määritellään pisteestä $x \in \mathbb{R}$ lähtevä Brownin liike $B^{(x)} = (B_t^{(x)})_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$

$$B_t^{(x)} = x + B_t,$$

missä $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ on standardi Brownin liike, jolle määritelmän mukaan pätee $B_0 = 0$. Satunnaismuuttujan $B_t^{(x)}$ todennäköisyystiheys on

$$p_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}.$$

Tehtävää III.9 ja ominaisuutta $p_t(x,y) = p_t(x-y) = p_t(y-x)$ käyttäen myös tälle tiheydelle pätee $\partial_t p_t(x,y) = (1/2)\partial_{yy} p_t(x,y)$.

Jos Brownin liike lähetetäänkin satunnaisesta pisteestä X_0, jonka jakauma on η, ja tätä prosessia merkitään $B^{(\eta)}$:lla, niin tällöin satunnaismuuttujan $B_t^{(\eta)} = X_0 + B_t$ todennäköisyystiheys on

$$(\eta * p_t)(y) = \int_{\mathbb{R}} p_t(x,y)\,\eta(\mathrm{d}x),$$

jota tulee verrata hyppyprosessien puoliryhmän operointiin todennäköisyysjakaumiin, eli Lauseeseen III.63. Joko suoralla laskulla tai käyttäen Brownin liikkeen lisäysten riippumattomuutta on helppo osoittaa ”siirtymäytimien” perheen $(p_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ puoliryhmäominaisuus

$$(\eta * p_s) * p_t = \eta * p_{t+s}.$$

Huomatetaan vielä, että tätä perhettä ei voida jatkaa negatiivisille t.

Generaattorilla on jälleen myös duaalinen tulkinta. Olkoon $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jonka oletamme tässä olevan kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva ja kompaktikantajainen. Kuten observaabeleille yleensä, tarkastelemme funktion arvoa prosessin satunnaisessa tilassa B_t, ja tämän odotusarvoa $\mathsf{E}[f(B_t)]$ (joka on olemassa f:n rajoittuneisuuden perusteella).

Lähtien Tehtävästä III.9 aikaderivaatta voidaan laskea dominoidun konvergenssin lausetta käyttäen ja sitten kaksi kertaa osittaisintegroimalla

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{E}[f(B_t)] &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\mathsf{E}[f(B_{t+h})] - \mathsf{E}[f(B_t)]\big)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(p_{t+h}(x) - p_t(x)\big) f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}p_t''(x)\, f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} p_t(x)\, f''(x)\,\mathrm{d}x = \mathsf{E}[\frac{1}{2}f''(B_t)].\end{aligned}$$

Siis jälleen odotusarvon aikaderivaatta voidaan lausua odotusarvona, jossa funktioon f on operoitu rajoittamattomalla lineaarioperaattorilla $L = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Tämä operaattori on todennäköisyystiheyksiin $p_t(x)$ operoivan generaattorin $L^* = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ adjungaatti, eikä operaattoreita L ja L^* tule sekoittaa keskenään (vastaavasti kuin Luvussa III.16 generaattorimatriisi $\mathbf{G}$ operoi joko normaalisti vasemmalta funktioiden sarakevektoreihin tai oikealta todennäköisyyksien rivivektoreihin — generaattorin kaksi duaalista toimintaa ovat siis luontevasti silloinkin toistensa adjungaatit).

Koska kuvaus $t \mapsto \mathsf{E}[f''(X_t)]$ on jatkuva pätee, pätee yllä oleva kaava kaikilla $t \geq 0$ ja voimme edelleen kirjoittaa sen muodossa

$$\mathsf{E}[f(X_t)] = \mathsf{E}[f(X_s)] + \int_s^t \mathsf{E}[Lf(X_u)]\mathrm{d}u \tag{III.20}$$

kaikilla $0 \leq s \leq t$.

Huomautamme, että yllä tarkasteltujen kaltaisten rajoittamattomien operaattorien funktionaalianalyysi vaatii hieman edistyneempää teoriaa kuin Luvun III.16 äärellisulotteisten (ja siksi automaattisesti rajoitettujen) operaattorien tapaus.

Todistamme vielä hieman laajemmalle luokalle funktioita f odotusarvon $\mathsf{E}[f(B_t)]$ aikaderivaatan esityksen generaattorin avulla.

Lause III.65. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kahdesti jatkuvasti derivoituva ja sellainen, että pätee $|f(x)| \leq Ce^{\varepsilon|x|}$ jollain vakioilla $C, \varepsilon \geq 0$. Tällöin kaikilla $t \geq 0$ pätee*

$$\partial_t \mathsf{E}[f(B_t)] = \mathsf{E}[L\, f(B_t)],$$

missä $L = (1/2)\partial_{xx}$.

Todistus. Olemme osoittaneet kaavan III.20, kun f on oletustemme lisäksi kompaktikantajainen. Voimme aina approksimoida tämän lauseen oletuksen mukaista f:ää kompaktikantajaisilla f_n siten, että $f_n \to f$ ja $f_n'' \to f$ pisteittäin $\mathbb{R}$:ssä, kun $n \to \infty$, ja $|f_n| \leq |f|$ ja $|f_n''| \leq |f''|$. Väite seuraa nyt dominoidusta konvergenssista, koska sen perusteella yhtälön III.20 molemmat puolet f_n:lle suppenevat kohti vastaavia f:lle, kun $n \to \infty$. □

Tehtävä III.10. Määritellään funktiot $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = e^{\alpha x}$, $f_4(x) = \sin(\alpha x)$, missä $\alpha \in \mathbb{R}$, ja differentiaalioperaattori $L = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

(a) Laske Lf_k, $k = 1, 2, 3, 4$.

(b) Sovella tätä odotusarvon $\mathsf{E}[f_k(B_t)]$ laskemiseksi, missä $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ on standardi Brownin liike.