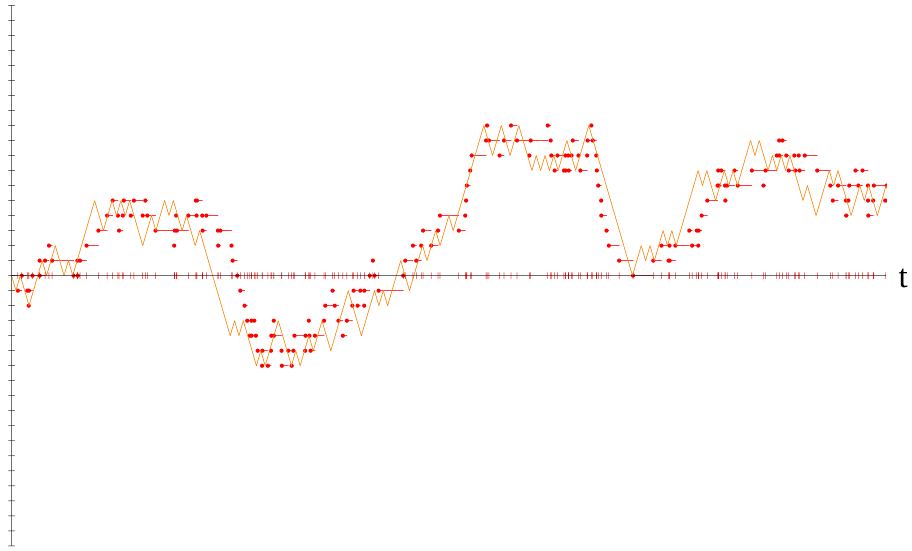

KUVA III.4. Jatkuva-aikainen satunnaiskävely eksponentiaalisin odotusajoin.

2.4. Satunnaisprosessien Poisson-kelloihin perustuvat siirtymät

Poisson-prosessia käytetään usein jatkuva-aikaisten diskreettien satunnaisprosessien määrittelemiseen, tai jopa diskreettiaikaisten diskreettien satunnaisprosessien muuntamiseen jatkuva-aikaisiksi, jolloin useat ominaisuudet ja laskut yksinkertaistuvat.

Poisson-prosessit toimivat laskureina ja laskurin lisäystä ajattelemme "herätyskellon soimisena". Kun herätyskello soi, prosessin tilaa muutetaan tai yritetään muuttaa tarkastelemamme satunnaisprosessin konstruktiosta riippuen. Muistutamme, vielä että Poisson-prosessin intensiteetillä $\lambda > 0$ peräkkäisten hyppyaikojen erotus on $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakautunut. Siksi sanomme, että nämä herätyskellot ovat muistittomia.

Tarkastelemme ensin yksinkertaisen satunnaiskävelyn jatkuva-aikaista versiota, ja sitten äärellisiä vuorovaikuttavia hiukkassysteemejä.

2.4.1. *Jatkuva-aikaiset satunnaiskävelyt*

Olkoon $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ yksiulotteinen satunnaiskävely parametrilla p: siis $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, missä $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ ovat riippumattomia samoin jakautuneita askeleita jakaumalla

$$\mathsf{P}[\xi_k = +1] = p, \qquad \mathsf{P}[\xi_k = -1] = 1 - p.$$

Olkoon $(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda > 0$, riippumaton askeleista $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$. *Jatkuva-aikainen satunnaiskävely* $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ määritellään asettamalla

$$X_t = S_{N_t}. \tag{III.15}$$

Jatkuva-aikainen satunnaiskävely $X = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ siis ottaa täsmälleen samat askeleet kuin diskreettiaikainen kävely $S = (S_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$. Ainoana erona on, että X ottaa askeleensa Poisson-herätyskellon $N = (N_t)_{t\in[0,\infty)}$ soidessa. Kuva III.4 havainnollistaa kävelyjä $X = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ ja $S = (S_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$. Kuvassa $\lambda = 1$ ja niinpä aika-välillä $[0, n]$ myös X astuu noin n askelta.

Poisson-prosessin ohentamisesta, kts. Propositio III.34, seuraa suoraan seuraava esitys jatkuva-aikaiselle satunnaiskävelylle: ylöspäin ja alaspäin otetut askeleet muodostavat riippumattomat ohennetut Poisson prosessit.

Propositio III.49. *Jos $(N_t^+)_{t\in[0,\infty)}$ ja $(N_t^-)_{t\in[0,\infty)}$ ovat kaksi riippumatonta Poisson-prosessia vastaavilla intensiteeteillä $p\lambda$ ja $(1-p)\lambda$, niin prosessin $t \mapsto N_t^+ - N_t^-$ jakauma on jatkuva-aikaisen satunnaiskävelyn $t \mapsto X_t$ jakauma parametreilla p ja λ.*

Voitaisiin siis tulkita, että prosessi X kantaa mukanaan kahta Poisson-herätyskelloa: yhden soidessa se ottaa aina askeleen ylöspäin, ja toisen soidessa alaspäin.

On myös mahdollista ja usein kätevää ajatella, että kävely ei kanna herätyskelloa tai -kelloja mukanaan, vaan jokaisessa hilapisteessä $x \in \mathbb{Z}$ on omat herätyskellonsa. Kävelymme ottaa askeleen silloin, kun sen senhetkisessä paikassa oleva kello niin kehottaa. Herätyskellot muodostavat riippumattoman kokoelman $(N^{(x,\xi)})_{x\in\mathbb{Z},\xi\in\{-1,+1\}}$ — pisteessä x oleva suuntaan ξ siirtymään kehottava kello $N^{(x,\xi)}$ on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda^{(x,\xi)}$. Tällaisella konstruktiolla (mielivaltaisilla intensiteeteillä $\lambda^{(x,\xi)}$) ei tosin ole etukäteen selvää, että prosessista X tulee hyvin määritelty: äärettömässä herätyskellokokoelmassa saattaisi olla soivia kelloja niin tiuhaan, että kävelymme karkaisi äärettömyyksiin äärellisessä ajassa. Jos $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ halutaan määritellä näin, tulee erikseen todistaa, että konstruoitu prosessi on melkein varmasti hyvin määritelty.[4]

Luonnollisin ensimmäinen kysymys koskee jatkuva-aikaisen satunnaiskävelyn jakaumaa annetulla ajanhetkellä t. Ratkaisemme sen kokonaisuudessaan Esimerkissä III.54. Ennen tätä esimerkkiä laskemme jatkuva-aikaisen satunnaiskävelyn odotusarvon ja varianssin ja muotoilemme näiden avulla sitä koskevan raja-arvolauseen. Proposition III.49 perusteella

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[X_t] &= \mathsf{E}[N_t^+] - \mathsf{E}[N_t^-] = (2p-1)\lambda t\\ \mathsf{Var}[X_t] &= \mathsf{Var}[N_t^+] + \mathsf{Var}[N_t^-] = \lambda t.\end{aligned}$$

Huomaamme, että X_t odotusarvo on sama kuin S_n:n odotusarvo, kun korvaamme $n = \lambda t$, mutta varianssi on suurempi kuin vastaavalla tavalla saatu varianssi. Itse asiassa varianssi vastaa diskreettiaikaisen symmetrisen satunnaiskävelyn varianssia.

Seuraava aputulos antaa vaihtoehtoisen menetelmän satunnaissummien odotusarvon ja varianssin laskemiseksi. Siinä emme tarvitse kovinkaan rajoittavia ehtoja ξ:n tai N:n jakaumille.

Lemma III.50 (Waldin identiteetit[5]). *Oletetaan, että $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja että $N \geq 0$ on kokonaislukuarvoinen satunnaismuuttuja, joka on riippumaton $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$:sta. Silloin*

[4] Itseasiassa meidän täytyi tehdä sama konstruoidessamme Poisson-prosessin eksponentiaalisista odotusajoista kaavalla (III.13): maksimi joukosta $\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,|\, T_1 + \cdots + T_n \leq t\}$ on melkein varmasti äärellinen, ja N_t siis melkein varmasti hyvin määritelty.

[5] Oletamme tässä, että summattavat ja summan yläraja ovat riippumattomia. Voisimme sallia riippuvuutta ns. pysäytysajan mielessä ja todistaa yleisemmän version näistä identiteeteistä.

- *jos* $\mathsf{E}[N] < \infty$ *ja* $\mathsf{E}[|\xi_k|] < \infty$, *niin*

$$\mathsf{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \xi_k\right] = \mathsf{E}[N]\,\mathsf{E}[\xi_1].$$

- *jos* $\mathsf{E}[N^2] < \infty$ *ja* $\mathsf{E}[\xi_k^2] < \infty$, *niin*

$$\mathsf{Var}\left[\sum_{k=1}^{N} \xi_k\right] = \mathsf{E}[N]\,\mathsf{Var}[\xi_1] + \mathsf{Var}[N]\,\mathsf{E}[\xi_1^2].$$

Todistus. Todistamme ensimmäisen väitteen. Toinen väite todistetaan samalla tavalla. Oletetaan, että $\mathsf{E}[N] < \infty$ ja $\mathsf{E}[|\xi_k|] < \infty$.

Kirjoittamalla $1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{N=n}$ saamme

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \xi_k\right] &= \mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{N=n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\left[\mathbb{1}_{N=n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] \\ &\overset{(**)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}[N=n]\,\mathsf{E}\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathsf{P}[N=n]\,\mathsf{E}\left[\xi_1\right] = \mathsf{E}[N]\,\mathsf{E}[\xi_1].\end{aligned}$$

Yhtälössä $(*)$ käytimme Fubinin lausetta ja yhtälössä $(**)$ riippumattomuutta. □

Toteamme nyt seuraavan lauseen, joka listaa olennaisimmat jatkuva-aikaista satunnaiskävelyä koskevat raja-arvolauseet. Lause seuraa jo aiemmin todistamistamme raja-arvolauseista.

Lause III.51. *Jatkuva-aikaiselle satunnaiskävelylle* $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ *seuraavat tulokset:*

- *(Suurten lukujen laki)* $\dfrac{X_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{m.v.}} (2p-1)\lambda$
- *(Keskeinen raja-arvolause)* $\dfrac{X_t - (2p-1)\lambda t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{w}} \mathrm{N}(0,\lambda)$.
- *(Donskerin lause) Kun* $p = 1/2$, *satunnaisprosessi* $X^{(n)} = (X_t^{(n)})_{t\in[0,1]}$ *suppenee kohti standardia Brownin liikettä aikavälillä* $[0,1]$, *kun* $n \to \infty$, *heikon suppenemisen mielessä jatkuvien funktioiden avaruudella, missä* $X_t^{(n)}$ *on* $(\lambda n)^{-1/2} X_{nt}$, *kun* $s = nt$ *on Poisson-prosessin* N *hyppyaika, eli pätee* $N_s = N_{s^-} + 1$, *ja muilla* t *näiden arvojen lineaarinen interpolaatio.*

Huomautus III.52. Yksinkertaisuuden vuoksi kirjoitimme Donskerin lauseesta vain $p = 1/2$ tapauksen. Pienin muutoksin voisimme muotoilla myös parametreilla $p \neq 1/2$ pätevän tuloksen.

Huomautus III.53. Prosessi $X = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ käyttäytyy oleellisesti samoin kuin tavallinen diskreettiaikainen satunnaiskävelykin. Tarkemmin sanottuna, X_t:tä tulisi verrata symmetriseen satunnaiskävelyyn $S_n^{\mathrm{sym}} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{\mathrm{sym}}$, missä $(\xi_k^{\mathrm{sym}})_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ ovat riippumattomia ja $\mathsf{P}[\xi_k^{\mathrm{sym}} = +1] = \frac{1}{2} = \mathsf{P}[\xi_k^{\mathrm{sym}} = -1]$. Hyvä nyrkkisääntö on silloin

$$X_t \approx S_{\lambda t}^{\mathrm{sym}} + (2p-1)\lambda t,$$

eli ajan kulua on nopeutettu tai hidastettu tekijällä λ, ja symmetriseen kävelyyn on lisätty ajelehtimistermi (engl. "drift term") $(2p-1)\lambda t$, odotusarvon mukaisesti.

Laskemme nyt koko X_t:n jakauman jatkaen Lemman III.50 todistuksessa käytetyn menetelmän soveltamista.

Esimerkki III.54. Satunnaiskävelyn paikan X_t jakauman laskemiseksi voidaan käyttää seuraavaa temppua.

Määritellään todennäköisyysgeneroivat funktiot askelten lukumäärän N_t jakaumalle sekä askelten ξ_k jakaumalle,

$$\begin{aligned} G_{N_t}(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}[N_t = n]\, z^n = \mathsf{E}\big[z^{N_t}\big] \\ G_{\xi}(z) &:= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathsf{P}[\xi_k = x]\, z^x = \mathsf{E}\big[z^{\xi_k}\big] \end{aligned}$$

vastaavasti. Helposti lasketaan $G_\xi(z) = pz + (1-p)z^{-1}$ ja $G_{N_t}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n z^n}{n!} e^{-\lambda t} = \exp\big((z-1)\lambda t\big)$.

Lämmittelynä toteamme, että tavallisen diskreettiaikaisen satunnaiskävelyn paikan S_n todennäköisyysgeneroiva funktio voidaan lausua riippumattomuutta käyttäen askelten todennäköisyysgeneroivan funktion avulla seuraavasti

$$G_{S_n}(z) = \mathsf{E}\big[z^{S_n}\big] = \mathsf{E}\big[z^{\sum_{k=1}^n \xi_k}\big] \overset{(\perp\!\!\!\perp)}{=} \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}\big[z^{\xi_k}\big] = G_\xi(z)^n.$$

Jatkuva-aikaisen satunnaiskävelyn paikan X_t todennäköisyysgeneroiva funktio saadaan vastaavanlaisella laskulla

$$\begin{aligned} G_{X_t}(z) &= \mathsf{E}\big[z^{X_t}\big] = \mathsf{E}\big[z^{\sum_{k=1}^{N_t} \xi_k}\big] \\ &= \mathsf{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{N_t = n\}} z^{\sum_{k=1}^n \xi_k}\Big] \overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{E}\Big[\mathbb{1}_{\{N_t=n\}} \prod_{k=1}^{n} z^{\xi_k}\Big] \\ &\overset{(\perp\!\!\!\perp)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}[N_t = n]\, \big(\mathsf{E}\big[z^{\xi_k}\big]\big)^n = G_{N_t}\big(G_\xi(z)\big). \end{aligned}$$

Eksplisiittisesti siis $G_{X_t}(z) = \exp\big((pz-(1-p)z^{-1}-1)\lambda t\big)$. Muun muassa odotusarvo voidaan laskea (Fubinin lausetta käyttäen) muodossa $\mathsf{E}[X_t] = G'_{X_t}(1) = (2p-1)\lambda t$, ja samaan tapaan huomaamalla $G''_{X_t}(1) = \mathsf{E}[X_t^2 - X_t]$ saadaan varianssi $\mathsf{Var}[X_t] = \lambda t$.

Kaavasta $G_{X_t}(z) = \exp\big((pz-(1-p)z^{-1}-1)\lambda t\big)$ nähdään, että paikan X_t jakauma on loputtomiin jaettava (engl. "infinitely divisible"). Tämä on eräs niistä jatkuva-aikaisen kävelyn mukavista ominaisuuksista, jotka helpottavat kävelyn analyysiä verrattuna tavalliseen diskreettiaikaiseen kävelyyn.

Esimerkki III.55 (Jatkuva-aikainen d-ulotteinen satunnaiskävely)**.** Vastaavasti voidaan määritellä jatkuva-aikainen satunnaiskävely hilalla $\mathbb{Z}^d$. Olkoon $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}_{>0}}$ jono riippumattomia askeleita tasaisella jakaumalla joukossa $\{+\underline{e}_1, -\underline{e}_1, +\underline{e}_2, -\underline{e}_2, \ldots, +\underline{e}_d, -\underline{e}_d\}$, ja olkoon $N = (N_t)_{t \in [0,\infty)}$ riippumaton Poisson prosessi. Asetetaan $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ ja

$$X_t = S_{N_t}.$$

Kun jatkuva-aikainen d-ulotteinen satunnaiskävely $X = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ kirjoitetaan koordinaattiprosessiensa avulla, $X_t = X_t^{(1)} \underline{e}_1 + \cdots + X_t^{(d)} \underline{e}_1$, nähdään jälleen Poisson prosessin ohentamisella, että kaikki koordinaattiprosessit $X^{(j)} = (X_t^{(j)})_{t \in [0,\infty)}$ ovat riippumattomia yksiulotteisia jatkuva-aikaisia symmetrisiä satunnaiskävelyitä, joiden hyppyintensiteetit ovat λ/d. Tämä koordinaattien riippumattomuus on esimerkki Poisson-kelloihin perustuvien siirtymien mukanaan tuomista yksinkertaistuksista ja hyvistä ominaisuuksista. Vertaa tätä esimerkkiä Tehtävään I.18.

2.4.2. *Äärellistilaiset Poisson-hyppyprosessit*

Olkoon $\mathcal{S}$ äärellinen joukko systeemin mahdollisia tiloja, ja $(\lambda_{x,y})_{x,y\in\mathcal{S}}$ kokoelma epänegatiivisia siirtymäintensiteettiparametreja. Haluamme, määritellä satunnaisprosessin $X = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ joukolla $\mathcal{S}$, eli $X_t \in \mathcal{S}$, siten, että joka tila-avaruuden $\mathcal{S}$ pisteparia kohti on Poisson-laskuri, jonka kasvaessa prosessi hyppää parin ensimmäisestä tilasta toiseen, mikäli prosessi on ensimmäisessä tämän parin tiloista juuri ennen tätä ajanhetkeä.

Olkoot $(N_t^{(x,y)})_{t\in[0,\infty)}$, kun $x, y \in \mathcal{S}$, riippumattomia Poisson-prosesseja intensiteeteillä $\lambda_{x,y}$. Todistamme ensin seuraavan aputuloksen. Merkitsemme satunnaisprosessin arvojen *vasemmanpuolista raja-arvoa* $Y_{t^-} = \lim_{s\nearrow t} Y_t$.

Lemma III.56. *Kaikilla $t \geq 0$ aikavälillä $[0,t]$ on vain äärellinen määrä Poisson-laskurien hyppyjä, eli pätee*

$$\mathsf{P}\Big[\sum_{x,y\in\mathcal{S}} N_t^{(x,y)} < \infty\Big] = 1.$$

Lisäksi mitkään kaksi Poisson-laskuria eivät hyppää yhtä aikaa, eli

$$\mathsf{P}\Big[\nexists t \geq 0,\ \exists x, y, x', y' \in \mathcal{S} \text{ s.e. } N_t^{(x,y)} \neq N_{t^-}^{(x,y)} \text{ ja } N_t^{(x',y')} \neq N_{t^-}^{(x',y')}\Big] = 1.$$

Todistus. Molemmat väitteet seuraavat siitä, että $N_t = \sum_{x,y\in\mathcal{S}} N_t^{(x,y)}$ on Poisson-prosessi intensiteetillä $\sum_{x,y\in\mathcal{S}} \lambda_{x,y}$, mikä puolestaan seuraa siitä, että $N^{(x,y)}$, $x, y \in \mathcal{S}$, ovat riippumattomia Poisson-prosesseja. Ensimmäinen väite on selvä prosessin $N = (N_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ arvojen äärellisyydestä. Toinen väite seuraa siitä, että N on yksinkertainen, eli sen hypyt ovat suuruudeltaan 1. $\square$

Olkoon $\mathcal{A}$ kaikkien sellaisten $(t, x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ kokoelma, että $N_t^{(x,y)} = N_{t^-}^{(x,y)} + 1$. Konstruoimme *hyppyprosessin* $X = (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ seuraavalla algoritmilla Poisson-laskureista $N^{(x,y)} = (N_t^{(x,y)})_{t\in[0,\infty)}$:

(i) Asetamme $X_0 = x_0$ jollain alkuarvolla $x_0 \in \mathcal{S}$ ja asetamme muistiin $\tau = 0$ ja $\xi = x_0$, joista τ kertoo mihin ajanhetkeen asti olemme konstruoineet prosessin ja ξ kertoo tämän hetkisen tilan.
(ii) Etsimme pienimmän $t > \tau$ siten, että $(t, \xi, y) \in \mathcal{A}$ jollain y. Lisäämme X:n polkuun pisteet $X_s = \xi$, kun $\tau < s < t$, ja $X_t = y$. Asetamme muistiin $\tau = t$ ja $\xi = y$.
(iii) Toistamme vaihetta (ii) loputtomasti.

Lemman III.56 perusteella tämä konstruktio on hyvin määritelty: vaiheessa (ii) piste y on yksikäsitteinen ja X_t:n arvon selvittämiseksi riittää äärellinen (mutta satunnainen) määrä vaiheen (ii) toistoja.

Hyppyprosessi käyttäytyy siis seuraavasti:

- *Nukkuminen*: Prosessi $t \mapsto X_t$ on vakio sellaisilla aikaväleillä, joilla kaikki laskuriprosessit $t \mapsto N_t^{(x,y)}$ $(x, y \in \mathcal{S})$ ovat vakioita.
- *Hypyt*: Jos $N_t^{(x,y)} = N_{t^-}^{(x,y)} + 1$ ja $X_{t^-} = x$, niin $X_t = y$.

Hyppyprosessin polut $t \mapsto X_t$ ovat paloittain vakioita, eli äärellisellä aikavälillä on vain äärellinen määrä hyppyjä, ja oikealta jatkuvia.

Esimerkki III.57 (Ising-mallin lämpöliike eli Glauber-dynamiikka)**.** Olkoon $G = (V, E)$ äärellinen graafi ja $\mathcal{S} = \{-1, +1\}^V$ sen Ising spin-konfiguraatioiden joukko. Olkoot $\beta > 0$ ja $B \in \mathbb{R}$ vakioita, joiden tulkinnat ovat käänteinen läpötila ja ulkoinen magneettikenttä, kuten aiemminkin, ja olkoon $H \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ Ising-mallin Hamiltonin funktio (energia),

$$H(\underline{\sigma}) = - \sum_{\{v,w\} \in E} \sigma_v \sigma_w - B \sum_{v \in V} \sigma_v .$$

Määrittelemme Ising ferromagneetin lämpöliikettä mallintavan hyppyprosessin $(X_t)_{t \in [0,\infty)}$, joka saa arvoja joukolla $\mathcal{S}$ — prosessin arvo $X_t = (\sigma_v(t))_{v \in V} \in \mathcal{S}$ kuvaa magneettisen materiaalimme spin-konfiguraatiota ajanhetkellä t, ja prosessin tilan hyppyjen ajatellaan olevan lämpöliikkeen aiheuttamia satunnaisia muutoksia konfiguraatissa. Prosessi tulee määritellyksi, kun annetaan tilojen väliset siirtymäintensiteetit

$$\lambda_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} = \begin{cases} \frac{\exp(-\beta H(\underline{\sigma}'))}{\exp(-\beta H(\underline{\sigma})) + \exp(-\beta H(\underline{\sigma}'))} & \text{jos } \# \{ v \in V \mid \sigma_v \neq \sigma'_v \} = 1 \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases} .$$

Lämpöliikkeen ajatellaan voivan muuttaa vain yhden spinin arvoa kerrallaan — ylläolevat siirtymäintensiteetit ovat nollasta eroavia vain sellaisten tilaparien välillä, jotka eroavat tasan yhdessä kohdassa.

Yllä määritelty prosessi voitaisiin ekvivalentisti kuvailla niin, että jokaisessa pisteessä $v \in V$ on riippumaton Poisson herätyskello yksikköintensiteetillä, ja sen soidessa tämän pisteen spin σ_v päivitetään ehdollisesta Ising mallin Boltzmann jakaumastaan, kun muiden spinien arvot $\underline{\sigma}_{| V \setminus \{v\}}$ on annettu — eli lokaalin lämpötasapainojakauman mukaisesti (tämä Poisson-prosessin ohennukseen perustuva ekvivalentti kuvailu jätetään harjoitustehtäväksi). Siksi prosessin $(X_t)_{t \in [0,\infty)}$ stationaarinen jakauma on Ising-mallin Boltzmann-jakauma $\mathsf{P}_{\beta,B}[\{\underline{\sigma}\}] \propto \exp(-\beta H(\underline{\sigma}))$ käänteisessä lämpötilassa β ja ulkoisessa magneettikentässä B — siis jos prosessi lähetetään lämpötasapainosta, $X_0 \sim \mathsf{P}_{\beta,B}$, se myös pysyy lämpötasapainossa, $X_t \sim \mathsf{P}_{\beta,B}$ kaikilla $t \geq 0$. Näistä syistä prosessia pidetään hyvänä Ising-ferromagneetin lämpöliikkeen mallina.

Tehtävä III.5. Olkoon $G = (V, E)$ äärellinen graafi, $\mathcal{S} = \{-1, +1\}^V$ sen Ising spin-konfiguraatioiden joukko, $H \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ Hamiltonin funktio ja P vastaava Boltzmann jakauma parametrillä $\beta > 0$. Olkoon $z \in V$ graafin jokin piste, $\underline{\varsigma} \in \{-1, +1\}^{V \setminus \{x\}}$ spin konfiguraatio muualla, ja $\underline{\varsigma}^+$ ja $\underline{\varsigma}^-$ spin konfiguraatiot

$$\varsigma^{\pm}_x = \begin{cases} \varsigma_x & \text{kun } x \neq z \\ \pm 1 & \text{kun } x = z \end{cases} .$$

Kun $\underline{\sigma} \sim \mathsf{P}$, osoita seuraavat kaavat ehdollisille todennäköisyyksille

$$\mathsf{P}\Big[\underline{\sigma} = \underline{\varsigma}^{\pm} \;\Big|\; \underline{\sigma}_{|V \setminus \{x\}} = \underline{\varsigma} \Big] = \frac{e^{-\beta H(\underline{\varsigma}^{\pm})}}{e^{-\beta H(\underline{\varsigma}^{+})} + e^{-\beta H(\underline{\varsigma}^{-})}} .$$

Tehtävä III.6. Osoita, että Esimerkin III.57 siirtymäintensiteettien määräämä prosessi on sama kuin se prosessi, joka saadaan päivittämällä pisteissä $v \in V$ olevien spinien arvot riippumattomien yksikköintensiteettisten Poisson prosessien $N^{(v)}$ saapumishetkillä ehdollisista Ising-mallin Boltzmann jakaumista kun muiden spinien arvot on annettu.