## 1.3. Jatkuvien prosessien heikko konvergenssi

### 1.3.1. *Prohorovin lause*

Metrisellä avaruudella $(\mathfrak{X}, \varrho)$ joukko $A \subset \mathfrak{X}$ on määritelmän mukaan kompakti, jos jokaisella jonolla $x_n \in A$ on (metriikan $\varrho$ mielessä) suppeneva osajono $x_{n_j}$ ja $\lim_{n\to\infty} x_{n_j} \in A$. Sanomme, että joukko $A \subset \mathfrak{X}$ on prekompakti (tai suhteellisesti kompakti), jos $A$:n sulkeuma on kompakti, joka on yhtäpitävää sen kanssa, että jokaisella $A$:n jonolla on suppeneva osajono — jonka raja kuuluu tietysti $A$:n sulkeumaan.

Ekvivalentin määritelmän saamme tuloksesta, jonka mukaan joukko $A \subset \mathfrak{X}$ on kompakti, jos ja vain jos jokaisella sen avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Sanomme, että kokoelma todennäköisyysmittoja $\Pi = \{\mathsf{P}\}$ metrisellä avaruudella $\mathfrak{X}$ on *tiukka*, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa kompakti $A \subset \mathfrak{X}$ siten, että

$$\mathsf{P}[A] \geq 1 - \varepsilon$$

kaikilla $\mathsf{P} \in \Pi$.

**Lause III.13** (Prohorov)**.** *Jos $\Pi$ on tiukka, niin silloin se on prekompakti heikossa suppenemisessa eli jokaisella jonolla $\mathsf{P}_n \in \Pi$ on olemassa heikosti suppeneva osajono $\mathsf{P}_{n_j}$.*

**Huomautus III.14.** Kun $\mathfrak{X}$ on lisäksi täydellinen ja separoituva, myös päinvastainen väite pitää paikkaansa: jos perhe $\Pi$ on prekompakti heikossa suppenemisessa, niin se on myös tiukka.

*Todistuksen hahmotelma.* Voimme valita kompaktit joukot $K_m$ siten, että $\mathsf{P}_n(K_m) \geq 1 - 1/m$ kaikilla $n, m \geq 1$ ja $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$. Koska jokainen $K_m$ on kompakti, on joukko $J = \bigcup_{m\geq 1} K_m$ separoituva — jopa silloin, kun avaruus $\mathfrak{X}$ ei ole separoituva. Voimme valita numeroituvan kokoelman $\mathcal{A}$ avoimia joukkoja siten, että jos $G$ on avoin ja $x \in J \cap G$, niin $x \in A \subset \overline{A} \subset G$ jollain $A \in \mathcal{A}$. Olkoon $\mathcal{H}$ nyt kokoelma joukkoja, joka sisältää tyhjän joukon $\emptyset$ ja kaikki äärelliset yhdisteet joukoista, jotka ovat muotoa $K_m \cap \overline{A}$, missä $m \geq 1$ ja $A \in \mathcal{A}$.

*Diagonaaliargumentilla* löydämme osajonon $\mathsf{P}_{n_j}$, jolle rajat

$$\nu(H) := \lim_{j\to\infty} \mathsf{P}_{n_j}[H]$$

on olemassa kaikilla $H \in \mathcal{H}$. Mikäli onnistumme osoittamaan, että on olemassa todennäköisyysmitta $\mathsf{P}$, jolle kaikilla avoimilla $G \subset \mathfrak{X}$ pätee

$$\mathsf{P}[G] = \sup_{H\subset G} \alpha(H), \tag{III.2}$$

missä tietysti $H \in \mathcal{H}$, niin silloin $\mathsf{P}_{n_j}$ suppenee heikosti kohti $\mathsf{P}$:tä: jos $H \subset G$, niin $\nu(H) = \lim_{j\to\infty} \mathsf{P}_{n_j}[H] \leq \liminf_{j\to\infty} \mathsf{P}_{n_j}[G]$ ja siksi $\mathsf{P}[G] \leq \liminf_{j\to\infty} \mathsf{P}_{n_j}(G)$. Väite seuraisi sitten Lauseesta II.68. Emme tarkista tässä sitä, että $\nu$:n avulla voimme määritellä todennäköisyysmitan, joka toteuttaa ominaisuuden (III.2). □

Koska haluamme käyttää tätä lausetta satunnaiskävelyyn, käymme läpi joitain jatkuvien funktioden avaruuden ominaisuuksia metrisenä avaruutena.

Tarvitsemme seuraavia ominaisuuksia kompakteista joukoista:

(1) Jatkuva funktio $f$ saavuttaa suurimman (vastaavasti pienimmän) arvonsa kompaktilla joukolla $A$, eli jos $M = \sup_{x\in A} f(x)$, on olemassa $x_0 \in A$, jolle $f(x_0) = M$.
(2) Kompaktin joukon $A$ kuva $f(A)$ jatkuvassa kuvauksessa $f$ on kompakti.

Jätämme harjoitustehväviksi lukijalle selvittää nämä ominaisuudet.

### 1.3.2. *Jatkuvien funktioiden avaruus*

Jatkuvien funktioiden avaruus $C([0,1])$ koostuu kaikista jatkuvista funktioista $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Avaruus $C([0,1])$ on metrinen avaruus, kun määrittelemme metriikan

$$\varrho(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|.$$

Tämä avaruus on separoituva ja täydellinen. Nämä ja joitain muita ominaisuuksia käymme läpi seuraavassa huomautuksessa.

**Huomautus III.15** (Avaruuden $C([0,1])$ ominaisuuksia)**.** Avaruus $C([0,1])$ on *separoituva.* Tämän nähdäksemme tiheäksi ja numeroituvaksi osajoukoksi voimme valita kokoelman paloittain lineaarisia funktioita, joiden lineaaristen osien päätepisteet kuuluvat rationaalisten pisteiden joukkoon $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ja jotka saavat rationaalisia arvoja näissä päätepisteissä.

Avaruus $C([0,1])$ on *täydellinen.* Jos $f_n$ on Cauchyn jono avaruudella $C([0,1])$, niin silloin kaikilla $t \in [0,1]$ jono $f_n(t)$ on Cauchyn jono $\mathbb{R}$:llä ja siksi suppeneva. Siispä $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ on olemassa pisteittäin ja lisäksi, jos $\varepsilon > 0$ ja $n_0 \in \mathbb{N}$ on sellainen, että $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ kaikilla $n, m > n_0$, niin $\|f_n - f\| \le \varepsilon$ kaikilla $n > n_0$. Riittää siis todistaa, että $f$ on jatkuva. Kaikilla $\varepsilon > 0$ valitaan $n$ siten, että $\|f_n - f\| < \varepsilon/3$, ja sitten $\delta > 0$ siten, että $|f_n(t) - f_n(s)| < \varepsilon/3$, kun $|t-s| < \varepsilon/3$. Tällöin

$$|f(t)-f(s)| \le |f(t)-f_n(t)| + |f_n(t)-f_n(s)| + |f_n(s)-f(s)| < \varepsilon,$$

kun $|t-s| < \delta$.

Koska $C([0,1])$ on metrinen avaruus, käytämme sigma-algebrana sen metriikan mukaisen topologian Borel-sigma-algebraa, joka on pienin sigma-algebra, joka sisältää avoimet kuulat $B(f_0,r) = \{f \in C([0,1]) \,:\, \|f-f_0\|_\infty < r\}$, $f_0 \in C([0,1])$ ja $r > 0$. Olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma $C([0,1])$:n mitallisia joukkoja, joka sisältää kaikki joukot jotka ovat muotoa:

$$\{f \,:\, f(t_1) \in A_1, f(t_2) \in A_2, \ldots, f(t_n) \in A_n\} \tag{III.3}$$

missä $A_k$ ovat $\mathbb{R}$:n Borel-joukkoja sisältäen ainakin kaikki suljetut joukot. Ottamalla numeroituva leikkaus tätä muotoa olevista joukoista nähdään helposti, että $\mathcal{A}$:n generoima sigma-algebra sisältää joukot, jotka ovat muotoa

$$\{f \,:\, |f(t)-f_0| \le r \text{ kaikilla } t \in \mathbb{Q}\cap[0,1]\}, \tag{III.4}$$

missä $f_0 \in C([0,1])$ ja $r > 0$. Koska $f$ on jatkuva, on joukko (III.4) sama kuin suljettu kuula $\overline{B(f_0,r)}$. Näin ollen *joukkojen* (III.3) *generoima sigma-algebra*, joka ei voi olla Borel-sigma-algebraa pienempi, koska joukot (III.3) ovat Borel-joukkoja, *on täsmälleen avaruuden* $C([0,1])$ *Borel-sigma-algebra.*

### 1.3.3. *Arzelà–Ascoli-lause*

Määritellään jatkuvalle funktiolle $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jokaisella $\delta > 0$

$$w_f(\delta) = \sup\left\{|f(t)-f(s)| \,:\, s,t \in [0,1],\ |s-t| \le \delta\right\},$$

jota kutsumme funktion $f$ *jatkuvuusmoduliksi* (engl. modulus of continuity).

Perhe $\mathcal{C}$ funktioita $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on *yhtäjatkuva*, jos pätee

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{f\in\mathcal{C}} w_f(\delta) = 0.$$

Yleisemmin, kun $(\mathfrak{X}, \varrho)$ on metrinen avaruus, niin perhe $\mathcal{C}$ funktioita $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ on *yhtäjatkuva*, jos

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{f\in\mathcal{C}} \sup\left\{|f(x)-f(y)| \,:\, x,y \in \mathfrak{X},\ \varrho(x,y) \le \delta\right\}$$

Seuraava lause voitaisiin muotoilla yleisemmässäkin muodossa, mutta tyydymme todistamaan sen $C([0,1])$:lle.

Osoitamme seuraavaksi, että jatkuvien funktioiden avaruudessa prekompaktit joukot ovat olennaisesti yhtäjatkuvien funktioiden joukkoja.

**Lause III.16** (Arzelà, Ascoli). *Joukko* $\mathcal{C} \subset C([0,1])$ *on prekompakti, jos ja vain jos pätee seuraavat ehdot*

$$\sup_{f\in\mathcal{C}} |f(0)| < \infty \tag{III.5}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{f\in\mathcal{C}} w_f(\delta) = 0 \tag{III.6}$$

*Todistus.* "Vain jos." Oletetaan ensin, että $\mathcal{C}$ on prekompakti. Koska $f \mapsto f(0)$ on jatkuva kuvaus $C([0,1])$:ltä $\mathbb{R}$:ään, (III.5) seuraa suoraan prekompaktisuudesta. Vastaavasti $G_n(f) = w_f(1/n)$ on jatkuva $f$:ssä ja vähenevä $n$:ssä sekä $G_n(f) \searrow 0$, kun $n \to \infty$, kaikilla $f$. Koska kaikilla $\varepsilon > 0$ kokoelma avoimia joukkoja $U_n = \{f : |G_n(f)| < \varepsilon\}$ on $C([0,1])$:n avoin peite, voidaan valita äärellinen osapeite $U_{n_1}, \ldots, U_{n_k}$, joka peittää $\overline{\mathcal{C}}$:n, ja siksi $w_f(1/n) < \varepsilon$ kaikilla $f \in \mathcal{C}$, kun $n \geq \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Yhtälö (III.6) seuraa tästä.

"Jos." Olkoon $f_n$ jono $\mathcal{C}$:ssä. Osoitamme, että voimme valita osajonon, joka suppenee. Käytämme tässä ns. diagonaaliargumenttia.

Huomaamme ensin, että riittävän suurella $k$ pätee $M = \sup_f w_f(1/k) < \infty$ ja siksi

$$|f(t)| \leq |f(0)| + \sum_{j=1}^{k} |f(t\,j/k) - f(t\,(j-1)/k)| \leq |f(0)| + k\,M$$

eli perhe $\mathcal{C}$ on pisteittäin rajoitettu.

Olkoon $t_1, t_2, t_3 \ldots$ tiheä joukko pisteitä $[0,1]$:ssä. Olkoon $S_0$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Valitaan ensin käyttäen perheen rajoittuneisuutta $t_1$:ssä ja prekompaktisuutta ääretön osajoukko $S_1 \subset S_0$ siten, että $f_n(t_1)$ suppenee, kun $n \to \infty$ siten, että $n \in S_1$. Seuraavaksi valitaan vastaavalla argumentilla $S_2 \subset S_1$ siten, että $f_n(t_2)$ suppenee, kun $n \to \infty$ siten, että $n \in S_2$. Jatkamalla tätä saadaan jono $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \ldots$ siten, että kaikilla $k$ jonot $f_n(t_j)$ suppenevat kaikilla $1 \leq j \leq k$, kun $n \to \infty$ siten, että $n \in S_k$. Valitaan jokaisesta $S_k$ sen $k$:s alkio $n_k$ ja muodostetaan diagonaalijono

$$S = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}.$$

Silloin erityisesti $n_j \in S_k$ kaikilla $j \geq k$ ja siksi $f_{n_j}(t_k)$ suppenee, kun $j \to \infty$.

Seuraavaksi käytämme yhtäjatkuvuutta. Olkoon $\varepsilon > 0$. Yhtäjatkuvuuden perusteella $w_f(\delta) < \varepsilon$ jollain $\delta > 0$ ja kaikilla $f$. Valitaan pisteet $s_1, \ldots, s_m$ pisteistä $t_1, t_2, t_3 \ldots$ siten, että $[0,1] \subset \bigcup_{j=1}^{m} (s_j - \delta, s_j + \delta)$. Riittävän suurella $j_0$

$$|f_{n_j}(s_k) - f_{n_{j'}}(s_k)| < \varepsilon,$$

kun $j, j' \geq j_0$ ja kaikilla $1 \leq k \leq m$. Siksi kaikilla $t \in [0,1]$ valitsemalla $s_k$ niin, että $|t - s_k| < \delta$

$$|f_{n_j}(t) - f_{n_{j'}}(t)| \leq |f_{n_j}(t) - f_{n_j}(s_k)| + |f_{n_j}(s_k) - f_{n_{j'}}(s_k)| + |f_{n_{j'}}(s_k) - f_{n_{j'}}(t)| < 3\varepsilon.$$

Niinpä $f_{n_j}$ on Cauchyn jono avaruudella $C([0,1])$ ja suppenee, koska $C([0,1])$ on täydellinen. □

1.3.4. *Todennäköisyysmittajonojen tiukkuus* $C([0,1])$*-avaruudella*

Seuraava lause on Arzelà–Ascoli-lauseen suora sovellus tiukkuuteen $C([0,1])$:llä.

**Lause III.17.** *Jono todennäköisyysmittoja* $(\mathsf{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avaruudella* $C = C([0,1])$ *on tiukka, jos ja vain jos seuraavat ehdot toteutuvat:*

(i) *Jokaisella* $\varepsilon > 0$ *on olemassa* $M > 0$ *ja* $n_0 \in \mathbb{N}$ *siten, että*

$$\mathsf{P}_n\big[\{f \in C \,:\, |f(0)| \geq M\}\big] \leq \varepsilon, \quad \textit{kaikilla } n \geq n_0.$$

(ii) *Jokaisella* $\varepsilon_1 > 0$ *ja* $\varepsilon_2 > 0$ *on olemassa* $\delta > 0$ *ja* $n_0 \in \mathbb{N}$ *siten, että*

$$\mathsf{P}_n\big[\{f \in C \,:\, w_f(\delta) \geq \varepsilon_1\}\big] \leq \varepsilon_2, \quad \textit{kaikilla } n \geq n_0.$$

*Todistus.* Mikäli $(\mathsf{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on tiukka, voimme kaikilla $\varepsilon > 0$ valita kompaktin $K \subset C([0,1])$ siten, että $\mathsf{P}_n(K) \geq 1 - \varepsilon$. Tällöin Lauseen III.16 perusteella riittävän suurella $M > 0$ pätee $K \subset \{f : |f(0)| \leq M\}$ ja riittävän pienellä $\delta > 0$ pätee $K \subset \{f : w_f(\delta) \leq \varepsilon_1\}$. Siispä lauseen ehdot seuraavat ja voimme valita $n_0 = 1$.

Oletetaan nyt, että lauseen ehdot (i) ja (ii) pätevät. Koska ehdot eivät kenties toteudu, kun $n < n_0$, annetuilla $M > 0$ ja $\delta > 0$, mutta toteutuvat kaikilla muilla $n$, voimme käyttää tapahtumien monotonisuutta $M$:ssä ja $\delta$:ssa ja kasvattamalla $M$:ää ja pienentämällä $\delta$:aa ja saada ehdot voimaan kaikilla $n$. Oletetaan siis, että $n_0 = 1$.

Annetulla $\varepsilon > 0$ valitaan $M > 0$ niin, että $B = \{f : |f(0)| \leq M\}$ toteuttaa $\mathsf{P}_n[B] \geq 1 - \varepsilon$. Samoin valitaan jokaisella $k \geq 1$ luku $\delta_k > 0$ siten, että $B_k = \{f : w_f(\delta_k) \leq 1/k\}$ toteuttaa $\mathsf{P}_n[B_k] \geq 1 - \varepsilon\, 2^{-k}$. Tällöin joukon $B \cap \bigcap_{k\geq 1} B_k$ sulkeuma $K$ toteuttaa $\mathsf{P}_n[K] \geq 1 - 2\varepsilon$. Koska $K$ toteuttaa Lauseen III.16 ehdot, on $K$ kompakti. Niinpä $(\mathsf{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on tiukka. □

Edellisen lauseen käyttöä helpottaa seuraava lemma.

**Lemma III.18.** *Olkoon* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ *ja oletetaan, että*

$$\min_{1<j<k} (t_j - t_{j-1}) \geq \delta. \tag{III.7}$$

*Silloin mille tahansa* $f \in C$ *pätee*

$$w_f(\delta) \leq 3 \max_{1\leq j\leq k} \max_{s\in[t_{j-1},t_j]} \big|f(s) - f(t_{j-1})\big|. \tag{III.8}$$

*Vastaavasti mille tahansa todennäköisyysmitalle* $\mathsf{P}$ *avaruudella* $C$ *pätee*

$$\mathsf{P}\big[\{f \in C \,:\, w_f(\delta) \geq 3\varepsilon\}\big] \leq \sum_{j=1}^{k} \mathsf{P}\left[\left\{\omega \in C \,:\, \sup_{s\in[t_{j-1},t_j]} \big|\omega(s) - \omega(t_{j-1})\big|\right\}\right]$$

*Todistus.* Merkitään välejä $I_j = [t_{j-1}, t_j]$ ja epäyhtälön III.8 oikella puolella olevaa maksimia $M$:llä. Jos $s$ ja $t$ ovat samalla välillä $I_j$, niin $|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f(t_{j-1})| + |f(s) - f(t_{j-1})| \leq 2M$. Jos $s$ ja $t$ ovat vierekkäisillä väleillä $s \in I_j$ ja $t \in I_{j+1}$, niin $|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f(t_j)| + |f(s) - f(t_{j-1})| + |f(t_j) - f(t_{j-1})| \leq 3M$. Ehto III.7 takaa, että jos $|s - t| \leq \delta$ niin $s$ ja $t$ ovat joko samalla välillä tai vierekkäisillä väleillä.

Viimeinen väite seuraa tapahtumien yhdisteen todennäköisyyden subadditiivisuudesta. □

## 1.4. Brownin liikkeen olemassaolo ja Donskerin lause

Tarkastellaan nyt satunnaissummia $S_t$ ja niiden skaalattuja paloittain lineaarisesti jatkuviksi prosesseiksi jatkettuja versioita $X_t^{(n)}$ kuten määrittelimme (III.1):ssä.

### 1.4.1. *Aputuloksia*

Todistamme kaksi aputulosta hieman eri oletuksin jonosta $\xi = (\xi_j)_{j\geq 1}$.

Sanomme, että $\xi = (\xi_j)_{j\geq 1}$ on *stationaatinen prosessi*, jos jokaisella $n \geq 1$ vektorin $(\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_{k+n})$ jakauma ei riipu luvusta $k \geq 0$.

**Lemma III.19.** *Kun $\xi = (\xi_j)$ on stationaarinen prosessi, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ ja $X^{(n)} = (X_t^{(n)})_{t\geq 0}$ on kuten määritellään kaavassa* (III.1)*, niin silloin edellä määritelty jono $(X^{(n)})_{n\geq 1}$ on tiukka, jos*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \lambda^2 \mathsf{P}\left[\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \lambda\sqrt{n}\right]$$

*Todistus.* Koska $X_0^{(n)} = 0$, Lauseen III.17 kohta (i) pätee suoraan. Riittää siis, että tarkistamme siis kyseisen lauseen kohdan (ii) eli todistamme, että

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}[w_{X^{(n)}}(\delta) \geq \varepsilon] = 0 \tag{III.9}$$

kaikilla $\varepsilon > 0$

Käytämme Lemmaa III.18, jonka mukaan kaikilla $\delta > 0$ ja $\varepsilon > 0$ voimme arvioida

$$\mathsf{P}\left[w_{X^{(n)}}(\delta) \geq 3\varepsilon\right] \leq \sum_{j=1}^n \mathsf{P}\left[\max_{s\in[t_{j-1},t_j]} |X_s^{(n)} - X_{t_{j-1}}^{(n)}| \geq \varepsilon\right], \tag{III.10}$$

kun $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ ja $\min\{t_j - t_{j-1} \,:\, 1 < j < k\}$.

Valitsemme jokaisella $n$ ajanhetket $t_j$ rationaalisiksi $t_j = m_j/n$. Reunoilla $m_0 = 0$ ja $m_k = n$. Lisäksi on helpompaa, jos jollain $h \in \mathbb{N}$ kokonaisluvut $m_j = h\,j$, kun $0 \leq j < k$. Ehdosta $h/n = t_j - t_{j-1} \geq \delta$ seuraa, että voimme valita $h = \lceil n\delta\rceil$. Luku $k$ on pienin kokonaisluku, jolle $kh \geq n$ eli $k = \lceil n/h\rceil$. Nyt

$$\frac{h}{n} \to \delta,$$

kun $n \to \infty$, ja siksi riittävän suurella $n$ käytämme arvioita

$$\frac{n}{h} \geq \frac{1}{2\delta}, \qquad k \leq \frac{2}{\delta}.$$

Koska maksimi $\max_{s\in[t_{j-1},t_j]} |X_s^{(n)} - X_{t_{j-1}}^{(n)}|$ saavutetaan jollain $s \in (1/n)\mathbb{Z}$, arviota (III.10) voidaan käyttää nyt saamaan se muotoon

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left[w_{X^{(n)}}(\delta) \geq 3\varepsilon\right] &\leq \sum_{j=1}^k \mathsf{P}\left[\max_{l\in[\![m_{j-1},m_j]\!]} \left|\frac{S_l - S_{m_{j-1}}}{\sqrt{n}}\right| \geq \varepsilon\right] \\
&= \sum_{j=1}^k \mathsf{P}\left[\max_{l\in[\![0,m_j-m_{j-1}]\!]} |S_l| \geq \varepsilon\sqrt{n}\right] \\
&\leq k\mathsf{P}\left[\max_{l\in[\![0,h]\!]} |S_l| \geq \varepsilon\sqrt{n}\right] \\
&\leq \frac{2}{\delta}\mathsf{P}\left[\max_{l\in[\![0,h]\!]} |S_l| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{h}}{\sqrt{2\delta}}\right]
\end{aligned}$$

Kiinteällä $\varepsilon > 0$ asetetaan $\lambda = \varepsilon/\sqrt{2\delta}$. Tällöin $\delta \to 0$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $\lambda \to \infty$, ja voimme kirjoittaa edellisen arvion muodossa

$$\mathsf{P}\left[w_{X^{(n)}}(\delta) \geq 3\varepsilon\right] \leq \frac{4\lambda^2}{\varepsilon^2}\mathsf{P}\left[\max_{l\in[\![0,h]\!]} |S_l| \geq \lambda\sqrt{h}\right]$$

Siispä (III.9) seuraa väitteen oletuksesta, kun muistamme, että raja $n \to \infty$ vastaa rajaa $h \to \infty$ ja raja $\delta \to 0$ vastaa rajaa $\lambda \to \infty$. □

Seuraavaan lemmaan vaadimme, että $\xi_k$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, joka on vahvempi ominaisuus kuin stationaarisuus.

**Lemma III.20** (Etemadin epäyhtälö)**.** *Jos $\xi_k$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, niin silloin kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 1$ ja* *reaalilukuvulla $\lambda > 0$ pätee*

$$\mathsf{P}\left[\max_{1\le k\le n}|S_k|\ge 3\lambda\right]\le 3\max_{1\le k\le n}\mathsf{P}\left[|S_k|\ge\lambda\right].$$

*Todistus.* Olkoon

$$B_k=\{\omega\,:\,|S_j(\omega)|<3\lambda \text{ kaikilla } j<k \text{ ja } |S_k(\omega)|\ge 3\lambda\}$$

Silloin $B_j\cap B_k=\emptyset$ kaikilla $j\neq k$ ja $\bigcup_{k=1}B_k=E:=\{\max_{1\le k\le n}|S_k|\ge 3\lambda\}$. Siispä

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left[\max_{1\le k\le n}|S_k|\ge 3\lambda\right]&\le \mathsf{P}\left[|S_n|\ge\lambda\right]+\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\left[B_k\cap\{|S_n|<\lambda\}\right]\\
&\le \mathsf{P}\left[|S_n|\ge\lambda\right]+\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\mathsf{P}\left[B_k\cap\{|S_n-S_k|>2\lambda\}\right]}_{=\mathsf{P}[B_k]\mathsf{P}[|S_n-S_k|>2\lambda],\text{ riippumattomuus}}\\
&\overset{(*)}{\le} \mathsf{P}\left[|S_n|\ge\lambda\right]+\left(\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}[B_k]\right)\max_{1\le k\le n}\left(\mathsf{P}\left[|S_k|>\lambda\right]+\mathsf{P}\left[|S_n|>\lambda\right]\right)\\
&\le 3\max_{1\le k\le n}\mathsf{P}\left[|S_k|>\lambda\right]
\end{aligned}$$

Epäyhtälössä $(*)$ käytimme muun muassa kolmioepäyhtälöä $2\lambda<|S_n-S_k|\le|S_n|+|S_k|$ ja huomasimme, että vähintään toisen luvuista $|S_n|$ ja $|S_k|$ on oltava suurempi kuin $\lambda$. □

### 1.4.2. *Donskerin lauseen todistus*

Seuraava on melko yleinen havainto topologiassa, joka on erittäin hyödyllinen, kun tarkastelemme todennäköisyysmittojen heikkoa konvergenssia.

**Propositio III.21.** *Jono $\mathsf{P}_n$ suppenee heikosti kohti $\mathsf{P}$:tä, jos ja vain jos jokaisella osajonolla on suppeneva osajono, joka suppenee kohti $\mathsf{P}$:tä.*

*Todistus.* Jos $\mathsf{P}_n$ suppenee heikosti kohti $\mathsf{P}$:tä, tällöin tietysti jokainen osajonokin suppenee kohti $\mathsf{P}$:tä. Käänteisen suunnan todistamme vastaoletuksella. Jos $\mathsf{P}_n$ ei suppene kohti $\mathsf{P}$:tä, niin on olemassa osajono $\mathsf{P}_{n_j}$ ja rajoitettu ja jatkuva $f$ ja $\varepsilon>0$ niin, että $|\mathsf{E}_{n_j}[f]-\mathsf{E}[f]|>\varepsilon$ . Tällöin mikään $\mathsf{P}_{n_j}$:n osajonokaan ei voi supeta kohti $\mathsf{P}$:tä, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että jokaisella osajonolla on suppeneva osajono, joka suppenee kohti $\mathsf{P}$:tä. □

*Donskerin lauseen (Lause III.1) todistus.* Teemme todistuksen kahdessa vaiheessa. Ensin osoitamme, että voimme valita suppenevan osajonon (tiukkuus), ja sitten osoitamme, että äärellisulotteisesten marginaalien suppeneminen riittää määräämään rajan jakauman (yksikäsitteisyys). Mikäli onnistumme osoittamaan tiukkuuden ja yksikäsitteisyyden niin silloin koko jonokin suppenee Proposition III.21 perusteella.

**Tiukkuus.** Osoitamme, että on olemassa $C>0$ siten, että riittävän isolla $n$ ja kaikilla $\lambda>0$

$$\mathsf{P}\left[\max_{1\le k\le n}|S_k|\ge\lambda\sqrt{n}\right]\le C\lambda^{-4}.$$

Kun $\xi_k$ toteuttavat $\mathsf{P}[\xi_k=1]=\mathsf{P}[\xi_k=-1]=1/2$, koska $\mathsf{E}[\xi_k]=0$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[S_n^4\right]&=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\left[\xi_k^4\right]+6\sum_{1\le j<k\le n}\mathsf{E}\left[\xi_j^2\right]\mathsf{E}\left[\xi_k^2\right]\\
&=n\mathsf{E}\left[\xi_1^4\right]+3n(n-1)\mathsf{E}\left[\xi_1^2\right]^2=(3n^2+(a-3)n)\mathsf{E}\left[\xi_1^2\right]^2\\
&\le 3n^2,
\end{aligned}$$

missä yleisyyden saavuttamiseksi olemme kirjanneet vakion $a$, jonka määrittelemme $\mathsf{E}\left[\xi_1^4\right]=a\mathsf{E}\left[\xi_1^2\right]^2$. Tässä tapauksessa $a=1$, $\mathsf{E}\left[\xi_1^4\right]=1$ ja $\mathsf{E}\left[\xi_1^2\right]=1$.

Nyt Lemmasta III.20 ja Chebyshevin epäyhtälöstä seuraa

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left[\max_{1\le k\le n}|S_k|\ge\lambda\sqrt{n}\right] &\le 3\max_{1\le k\le n}\mathsf{P}\left[|S_k|\ge\lambda\sqrt{n}/3\right]\\ &\le 3\,\frac{3n^2}{\lambda^4n^2/3^4}\le C\,\lambda^{-4}\end{aligned}$$

vakiolla $C = 3^6$. Tiukkuus seuraa nyt Lemmasta III.19.

**Yksikäsitteisyys.** Olkoon $X^*$ jonon $X^{(n_j)}$ heikko raja, jonka löydämme tiukkuuden perusteella. Huomaamme, että jokaisella $t \ge 0$ keskeisen raja-arvolauseen perusteella jono $X_t^{(n)}$ suppenee heikosti kohti Gaussista satunnaismuuttujaa jakaumalla $N(0,t)$. Eli $X_t^*$:n jakauma on $N(0,t)$.

Asetetaan $\tilde{X}_t^{(n)} = n^{-1/2}S_{\lfloor nt\rfloor}$. Nyt $\sup_{t\in[0,1]}|X_t^{(n)} - \tilde{X}_t^{(n)}| \le n^{-1/2}$. Siispä vektorien

$$(X_{t_1}^{(n)}, X_{t_2}^{(n)}, \ldots, X_{t_k}^{(n)}) \quad \text{ja} \quad (\tilde{X}_{t_1}^{(n)}, \tilde{X}_{t_2}^{(n)}, \ldots, \tilde{X}_{t_k}^{(n)})$$

heikot rajat, kun $n \to \infty$, ovat samat. Nyt satunnaisvektorin

$$(\tilde{X}_{t_1}^{(n)}, \tilde{X}_{t_2}^{(n)} - \tilde{X}_{t_2}^{(n)}, \tilde{X}_{t_3}^{(n)} - \tilde{X}_{t_2}^{(n)}, \ldots, \tilde{X}_{t_k}^{(n)} - \tilde{X}_{t_{k-1}}^{(n)})$$

missä $0 = t_0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, komponentit ovat riippumattomat ja siksi keskeisen raja-arvolauseen perusteella se suppenee kohti vektoria

$$(N_1, N_2, \ldots, N_k)$$

missä $N_j$ ovat riippumattomia ja $N_j$: jakauma on $N(0, t_j - t_{j-1})$. Siispä $X^*$:n äärellisdimensioiset jakaumat ovat sellaiset, että

$$(X_{t_1}^*, X_{t_2}^*, \ldots X_{t_k}^*) \sim (N_1, N_1 + N_2, \ldots, N_1 + N_2 + \ldots + N_k).$$

Tämä määrää koko $X^*$:n jakauman yksikäsitteisesti: Huomautuksen III.15 mukaan äärellisdimensioiset marginaalit muodostavat generoivat koko sigma-algebran $C([0,1])$:llä. Itse asiassa kaikki $C([0,1])$:n avoimet joukot voidaan lausua numeroituvina yhdisteinä muotoa (III.3) olevista "$C[0,1]$:n sylinterijoukoista": vastaavasti kuin suljetut kuulat osoitimme numeroituviksi leikkauksiksi sylinterijoukoista, voimme osoittaa avoimet kuulat numeroituviksi yhdisteiksi sylinterijoukoista. Mielivaltainen avoin joukko voidaan ilmaista numeroituvana yhdisteenä käyttäen $C[0,1]$:n separoituvuudesta tuttua tiheätä joukkoa ja kuulia, joiden keskipisteet ovat tässä joukossa. Proposition II.69 mukaan jono $\mathsf{P}_{n_j}$ suppenee kohti todennäköisyysmittaa $\mathsf{P}^*$, joka on yksikäsitteinen ja jonka äärellisdimensioiset jakaumat ovat samat kuin Brownin liikkeen. □

Eräs seuraamus Donskerin lauseesta on se, että Brownin liike on todella olemassa. Olemme konstruoineet sen todennäköisyysmittana $C([0,1])$:llä. Prosessin jatkaminen puoliäärettömälle välille $\mathbb{R}_{\ge 0} = [0,\infty)$ ei ole ongelma. Voimme valita jonon riippumattomia prosesseja $(B_t^{(n)})_{t\in[0,1]}$ ja määritellä kaikilla $t \ge 0$

$$B_t = \sum_{k=1}^{\lfloor t\rfloor} B_1^{(k)} \;+\; B_{t-\lfloor t\rfloor}^{(\lfloor t\rfloor)}.$$

Tämä prosessi toteuttaa kaikki Brownin liikkeeltä vaaditut ominaisuudet.

**Määritelmä III.22.** Todennäköisyysmittaa avaruudella $C([0,1])$, joka toteuttaa standardin Brownin liikkeen määritelmän kutsutaan *Wiener-mitaksi*.