

KUVA II.3. Graafi muodostuu pisteistä (kärjistä) ja niitä yhdistävistä viivoista (särmistä). Pisteet joita yhdistää viiva ovat naapureita, ja polkuyhtenäistä maksimaalista joukkoa pisteitä sanotaan komponentiksi.

2. Isingin malli

Statistisen fysiikan juuret ovat toisaalta termodynamiikassa ja kaasujen teoriassa, mutta toisaalta myös magneettisten aineiden teoriassa ja niiden termodynamiikassa. Erityisesti merkittävä statistisen fysiikan esimerkki on Isingin malli, joka mallintaa yksinkertaista ferromagneettia ja jonka sanotaan olevan statistisen fysiikan tutkituin malli — eikä syyttä. Esimerkiksi Scopus-artikkelitietokannassa on 5340 julkaisua, joiden otsikko sisältää ”Ising model” -sanaparin.

2.1. Isingin malli yleinen määritelmä graafilla G

Ennen Isingin mallin määritelmää toteamme, että tämä malli kuuluu statistisen fysiikan hilamalleihin. Tällaiset mallit määritellään yleisimmillään graafeilla. Yleensä perusmääritelmä annetaan äärellisellä graafilla. Tällöin statistisen fysiikan mallin todennäköisyysavaruus on äärellinen ja todennäköisyydet on helppo määrittellä, koska ne ovat vain reaalilukuja. Äärettömän graafin rajaa voidaan kutsua termodynaamiseksi rajaksi.

2.1.1. Graafeista

Kutsumme $G = (V, E)$:tä (äärelliseksi) *graafiksi* jos V on äärellinen joukko ja E on kokoelma V :n kahden alkion osajoukkoja, eli $E \subset \{ \{v, w\} \subset V : v \neq w \}$. Alkioita V :ssä kutsutaan *pisteiksi* (myös kärki) ja E :ssä *viivoiksi* (myös särmä). Terminologia ”kärki, särmä, tahko jne.” juontaa juurensa avaruusgeometriaan.

Jos $\{v, w\} \in E$, sanomme, että v ja w ovat *naapureita*. Graafi on *yhtenäinen*, jos se on polkuyhtenäinen, eli mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää polulla, jonka peräkkäiset pisteet ovat naapureita. Pisteen v *aste* on sen naapurien lukumäärä $\deg(v) = \#\{w \in V : \{v, w\} \in E\}$.

Esimerkki II.12 (Lineaarinen graafi). Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $V_n = \llbracket 1, n \rrbracket$. Määritellään E_n siten, että $\{v, w\} \in E_n$ jos ja vain jos $|v - w| = 1$.

Esimerkki II.13 (Periodinen lineaarinen graafi). Kuten edellinen esimerkki, mutta lisätään E_n :ään vielä särmä $\{1, n\}$. Periodisella lineaarisella graafilla jokaisen pisteen aste on kaksi, kun taas edellisen esimerkin graafin ”päätepisteiden” aste on yksi.

Esimerkki II.14 (d -dimensioinen kuutio). Olkoon $V_{d,n} = \llbracket 1, n \rrbracket^d$ ja määritellään $E_{d,n}$ siten, että $\{v, w\} \in E_{d,n}$ jos ja vain jos $|v - w| = 1$.

2.1.2. Isingin malli graafilla $G = (V, E)$

Kun V on äärellinen joukko ja todennäköisyysavaruuden perusjoukkona eli tila-avaruutena on $\Omega = \{-1, +1\}^V$, yleinen nk. spin-malli voitaisiin määrittellä siten, että tilana $\underline{\sigma} = (\sigma_v)_{v \in V} \in \{-1, +1\}^V$ ja tämän tilan energia on

$$H(\underline{\sigma}) = - \sum_{v \in V} J_v^{(1)} \sigma_v - \sum_{v, w \in V} J_{vw}^{(2)} \sigma_v \cdot \sigma_w - \sum_{u, v, w \in V} J_{uvw}^{(3)} \sigma_u \cdot \sigma_v \cdot \sigma_w + \dots,$$

missä vakioita $J_{v_1, \dots, v_k}^{(k)}$ kutsutaan *kytkentävoimakkuuksiksi*. Vakio $J_v^{(1)}$ voitaisiin tulkita, kuten teemme alla, ulkoiseksi magneettikentäksi pisteessä v . Tarkastelemme erästä erikoistapausta tästä mallista, joka on perusteltu valinta ferromagnetismin kuvaamiseksi yksinkertaisella tavalla, joka kuitenkin sisältää oikeanlaista fysiikkaa.

*Isingin mallissa*² on jokaisessa graafin jokaisessa kärjessä *alkeismagneetti* eli *spin*. Määrittelemme graafin $G = (V, E)$ *spin-tilan* vektorina $\underline{\sigma} = (\sigma_v)_{v \in V} \in \{-1, +1\}^V$ ja merkitsemme spin-tilojen avaruutta Ω_G :llä, eli $\Omega_G = \{-1, +1\}^V$. Isingin mallissa todennäköisyysavaruus on äärellinen avaruus Ω_G ja määrittelemme spin-tilan energian ja systeemin Hamiltonin funktion kaavalla.

$$H_{G,B}(\underline{\sigma}) = - \sum_{\{v,w\} \in E(G)} \sigma_v \cdot \sigma_w - B \sum_{v \in V(G)} \sigma_v, \quad (\text{II.13})$$

missä vain parivuorovaikutus naapureiden välillä graafilla ja vuorovaikutus *ulkoi-sesen magneettikentän* $B \in \mathbb{R}$ kanssa. Todennäköisyysmitan $\mathbb{P}_{G,\beta,B}$ määrittelemme jokaisella $\beta \geq 0$ ja $B \in \mathbb{R}$, jotka ovat kiinteitä parametreja, Boltzmannin jakauman mukaisesti

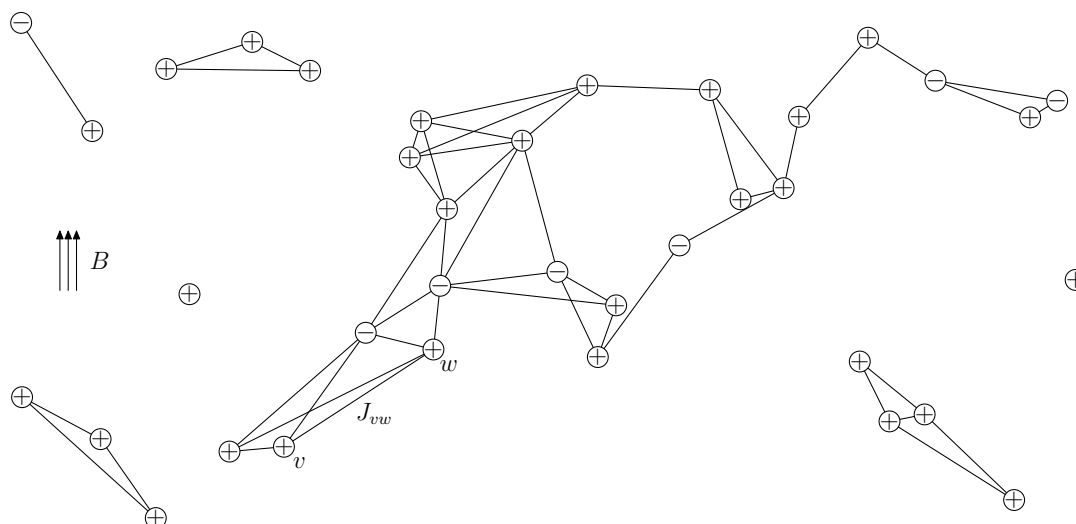
$$\mathbb{P}_{G,\beta,B}[\underline{\sigma}] = \frac{\exp(-\beta H_{G,B}(\underline{\sigma}))}{Z(G, \beta, B)}.$$

Tilasumma on $Z(G, \beta, B) = \sum_{\underline{\sigma}} \exp(-\beta H_{G,B}(\underline{\sigma}))$.

Huomautus II.15. Isingin malli, jolle $J_{vw} = J_{vw}^{(2)} > 0$, mallintaa *ferromagnetismia*. Tämä voidaan seuraavasti: Isingin mallissa konfiguraation vierekkäisten spinien vuorovaikutuksesta tuleva energia on alimmillaan silloin, kun spinit ovat samaan suuntaan. Myös ulkoisen magneettikentän kanssa vuorovaikuttamisen energia on pienimmillään, kun spin on sama kuin B :n etumerkki. Boltzmannin jakauman mukaisesti alhaisemman energian omaavien konfiguraatioiden todennäköisyys on suurempi. Siispä huomaamme, että Isingin mallin todennäköisyysmitta ”suosii” spinien järjestäytymistä samansuuntaisiksi ja myös niiden järjestäytymistä B :n suuntaisiksi. Tämä perustelee myös B :n kutsumisen ulkoiseksi magneettikentäksi.

Mallin käytös riippuu käänteislämpötilasta β . Kun $\beta \rightarrow \infty$, vain minimienergiatilojen todennäköisyydet ovat positiivisia. Kun graafi on yhtenäinen, näitä tiloja on kaksi, tilat

²Isingin malli (tai Ising-malli) nimetty Wilhelm Lenzin oppilaan Ernst Isingin mukaan, jonka väitöskirjan aihe tämän mallin analysointi yhdessä ulottuvuudessa oli.



KUVA II.4. Isingin mallissa vapausasteet, spinit, jotka saavat arvot ± 1 , ovat graafin pisteissä. Systemin energia riippuu vuorovaikutuksesta naapureiden välillä, jonka voimakkuuden määräävät luvut $(J_{vw}^{(2)})_{\{v,w\} \in E} = (J_{vw})_{\{v,w\} \in E}$, ja vuorovaikutuksesta ulkoisen magneettikentän B kanssa.



(a) Lämpötila alle kriittisen. (b) Kriittinen lämpötila. (c) Lämpötila yli kriittisen.

KUVA II.5. Kaksiulotteinen Isingin malli ilman ulkoista magneettikenttää eri lämpötiloissa. Kuvassa mustat pikselit ovat (vaikkapa) $+1$ -spinejä ja valkoiset pikselit -1 -spinejä. Reunaehdot ovat osittain $+1$ ja osittain -1 , jolloin kuvassa nähdään iso $+1$ -komponentti ja iso -1 -komponentti. Malli on ferromagneettinen tietyn kriittisen lämpötilan alapuolella.

$\sigma_v \equiv +1$ ja $\sigma_v \equiv -1$. Kun taas $\beta = 0$, ovat kaikki spinit riippumattomia. Odotamme siis, että malli on ferromagneettinen välillä (β_c, ∞) ja paramagneettinen välillä $(0, \beta_c)$ jollain β_c . Tulomme havaitsemaan tämän kaksi- ja korkeampiulotteisilla hiloilla ja ns. keskimääräisen kentän mallissa.

2.1.3. Tilasumma generoivana funktiona ja yhteys vapaaseen energiaan

Usein statistisessa fysiikassa keskitytään partitiofunktion eli tilasumman laskemiseen. Syynä tähän on se, että partitiofunktio on eräänlainen momentit generoiva funktio, jos siihen sisällytetään riittävästi vapaita parametreja, ja kuvaa siten koko

todennäköisyysjakaumaa. Esimerkiksi magnetisaatio saadaan $\log Z(\beta, B)$:ta derivoimalla B :n suhteen

$$\frac{1}{\beta} \partial_B \log Z(\beta, B) = \frac{\sum_{\underline{\sigma}} (\sum_v \sigma_v) \exp(-\beta H_{G,B}(\underline{\sigma}))}{\sum_{\underline{\sigma}} \exp(-\beta H_{G,B}(\underline{\sigma}))} = \mathbf{E} \left(\sum_v \sigma_v \right).$$

Vielä yksityiskohtaisempaa tietoa saisimme, jos määrittelisimme Hamiltonin funktion $H_{G,\underline{B}}$, jossa ulkoinen magneettikenttä vaihtelee pisteittäin, eli

$$H_{G,\underline{B}}(\underline{\sigma}) = - \sum_{\{v,w\} \in E} \sigma_v \cdot \sigma_w - \sum_{v \in V} B_v \sigma_v.$$

Tällöin

$$\frac{1}{\beta} \partial_{B_v} \log Z(\beta, \underline{B}) = \frac{\sum_{\underline{\sigma}} \sigma_v \exp(-\beta H_{G,\underline{B}}(\underline{\sigma}))}{\sum_{\underline{\sigma}} \exp(-\beta H_{G,\underline{B}}(\underline{\sigma}))} = \mathbf{E}(\sigma_v).$$

Tämä lähestymistapa näkyy statistisessa fysiikassa siinä, että usein laskut tähtäävät vain partitiofunktion laskemiseen. Implisiittisesti tulisi kuitenkin ymmärtää, että mikäli mallin partitiofunktio pystytään laskemaan riittävän monta vapaata parametria mukana pitäen, niin silloin pystytään laskemaan monia mitattavia suureita, kuten magnetisaatio Isingin mallissa.

2.1.4. Reunaehdot

Määrittelemme tässä luvussa, mitä tarkoitamme seuraavilla reunaehdoilla (listaamme tässä myös notaation partitiofunktioille, jota käytetään vastaavasti muillekin suu- reille kuten Hamiltonin funktioille tai vapaalle energialle):

- $Z_{G,+}$: +1-reunaehdot (vastaavasti -1 -reunaehdot ja yleisemmin $\underline{\xi}$ -reunaehto)
- $Z_{G,0}$: vapaat reunaehdot
- $Z_{[1,N]^d, \text{per.}}$: periodiset reunaehdot

Esimerkki II.16 (+1-reunaehto ja $\underline{\xi}$ -reunaehto Isingin mallissa). Haluaisimme määritellä, mitä Isingin mallissa tarkoittaa vakio-reunaehdot kuten +1-reunaehto. Kun G on graafin G' ali-graafi³ $G \subset G'$, niin $V_1 = V(G') \setminus V(G)$ on graafin G ulkopuolisten pisteiden joukko. Graafin G reuna $V_\partial \subset V_1$ voidaan määritellä niiksi pisteiksi V_1 :ssä joilla on naapuri (G' :n pisteenä) $V(G)$:ssä. Haluamme siis määritellä Isingin mallin hieman G :tä laajemmalla graafilla siten, että $\sigma_v = +1$, kun $v \in V_\partial$. Yksinkertaisin tapa on

- (1) käyttää G' :n todennäköisyysavaruutta $\Omega_{G'}$ ja Hamiltonin funktiota $H_{G',B}$,
- (2) sitten rajoittaa mahdolliset $\underline{\sigma}$:t niihin jotka toteuttavat $\sigma_v = +1$, kun $v \in V_1$, ja
- (3) määritellä todennäköisyysmitta

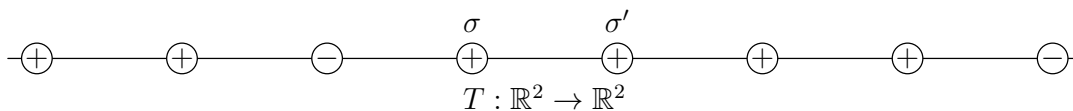
$$P_{G,\beta,B,+} = \frac{1}{Z_{G,+}(\beta, B)} \exp(-\beta H_{G',B}(\underline{\sigma})) \mathbb{1}_{\{\sigma_v = +1, \forall v \in V_1\}}(\underline{\sigma})$$

missä partitiofunktio on

$$Z_{G,+}(\beta, B) = \sum_{\underline{\sigma} \in \Omega_{G'}} \exp(-\beta H_{G',B}(\underline{\sigma})) \mathbb{1}_{\{\sigma_v = +1, \forall v \in V_1\}}(\underline{\sigma}).$$

Tätä mallia kutsumme Isingin malliksi G :llä +reunaehdoilla ja sen määritelmä edellyttää ympäröivän graafin G' valintaa. Vastaavasti millä tahansa $\underline{\xi} \in \Omega_{G'}$ voidaan määritellä $\underline{\xi}$ -reunaehto niin, että vaaditaan $\sigma_v = \xi_v$ kun $v \in V_1$.

³Graafi G on graafin G' aligraafi, jota merkitään $G \subset G'$, jos $V(G) \subset V(G')$ ja $E(G) \subset E(G')$.



KUVA II.6. Isingin malli lineaarisella hilalla.

Esimerkki II.17 (Vapaat reunaehdot Isingin mallissa). Luvun 2.1.2 määritelmää Isingin mallille voidaan kutsua Isingin malliksi vapaille reunaehdoilla. Edellisen esimerkin tapaan graafilla G määritelty Isingin malli voidaan nähdä graafilla G' määriteltynä Isingin mallina, kun joukossa V_1 asetamme muodollisesti $\sigma_v \equiv 0$.

Esimerkki II.18 (Periodiset reunaehdot Isingin mallissa). Kun $G = \llbracket 1, N \rrbracket$, voimme muodostaa graafin G' lisäämällä viivan pisteiden 1 ja N välille. Isingin mallia G' :lla kutsutaan Isingin malliksi G :llä periodisilla reunaehdoilla. Vastaava konstruktio toimii korkeammassakin ulottuvuudessa: suorakulmaiseen särmiöön $\llbracket 1, N_1 \rrbracket \times \llbracket 1, N_2 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, N_d \rrbracket$ lisätään viivat, jotka yhdistävät särmiön vastakkaisilla tahkoilla toisiaan vastaavat pisteet viivalla.

Huomautus II.19. Kun tarkastelemme Isingin mallia *muilla kuin vapaille reunaehdoilla*, on kenties mielekästä valita $B = 0$, koska reunaehdot voitaisiin myös tulkita ulkoiseksi magneettikentäksi.

2.2. Yksiulotteisen Isingin mallin ratkaisu

Esitämme tässä luvussa Isingin mallin ”ratkaisun” yhdessä ulottuvuudessa *siirtomatriisimenetelmällä*.

Tarkastellaan ensin ketjua $\sigma_0 = s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N, \sigma_{N+1} = t$, missä $s, t \in \{\pm 1\}$ ovat reunaehtoja (Voimme myös valita alla $s, t \in \{\pm 1, 0\}$. Kaikki kaavat pätevät edelleen.). Yksiulotteisen Isingin mallin Hamiltonin funktio on

$$H(\underline{\sigma}) = - \sum_{k=0}^N \sigma_k \sigma_{k+1} - B \sum_{k=0}^N \sigma_k,$$

missä olemme ottaneet termin $-B\sigma_0$ mukaan symmetriasyistä.

Merkitsemme

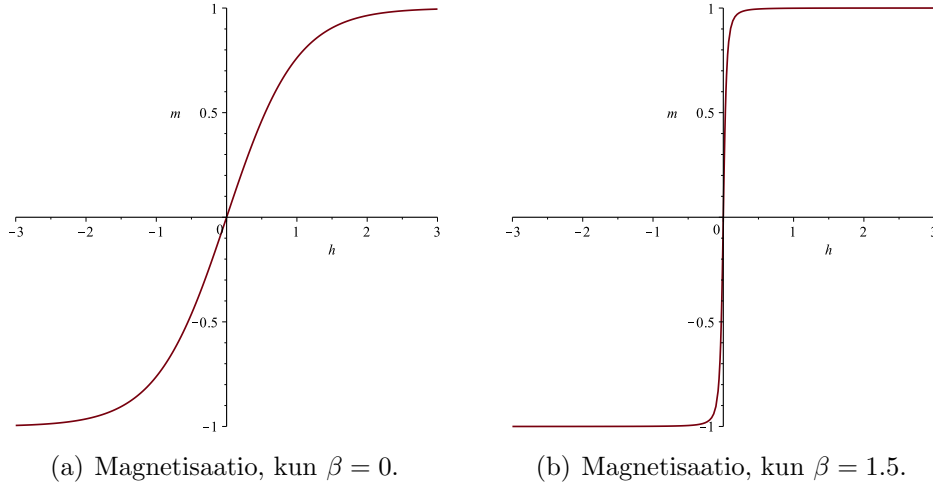
$$h = \beta B,$$

Kun tulkitsemme summan $\sum_{\sigma'=\pm 1} a_{\sigma, \sigma'} b_{\sigma', \sigma''}$ matriisitulona, voimme kirjoittaa partitiofunktio muodossa

$$\begin{aligned} Z(\beta, B) &= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \dots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \prod_{n=1}^N \exp(\beta \sigma_n \sigma_{n+1} + h \sigma_n) \\ &= (T^{N+1})_{s,t}, \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

missä T^{N+1} on $N+1$ -kertainen matriisitulo $V V \dots V$ ja $(\)_{s,t}$ on komponentti s, t tästä matriisista. Matriisi T on

$$T = \begin{matrix} & \sigma = +1 & \sigma = -1 \\ \begin{matrix} \sigma' = +1 \\ \sigma' = -1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} e^{\beta+h} & e^{-\beta-h} \\ e^{-\beta+h} & e^{\beta-h} \end{pmatrix} \end{matrix}$$



KUVA II.7. Yksiulotteisen Isingin mallin magnetisaatio on $h = \beta B$:n jatkuva funktio kaikilla β . Ainoastaan nollalämpötilassa eli rajalla $\beta \rightarrow \infty$ magnetisaatio on epäjatkuva.

Voimme diagonalisoida matriisin T . Sen ominaisarvot saadaan karakteristisesta polynomista

$$\det(T - \lambda I) = \lambda^2 - 2e^\beta \cosh(h)\lambda + 2 \sinh(\beta)$$

nollakohtina

$$\lambda_{\pm} = e^\beta \cosh(h) \pm \sqrt{e^{2\beta} \cosh^2(h) - 2 \sinh(\beta)}.$$

Huomaamme, että $\lambda_+ > \lambda_- > 0$, kun $\beta > 0$.

Esimerkki II.20 (Vapaa energia ja magnetisaatio periodisilla reunaehdoilla). Tarkastellaan yksiulotteista Isingin mallia $[[1, N]]$:llä periodisilla reunaehdoilla, $\sigma_{N+1} = \sigma_1$.

Tekemällä vastaava lasku kuin yllä partitiofunktio $Z = Z_{[[1, N]], \text{per}}$. saadaan N -kertaisen tulon jälkeen (engl. trace)

$$Z(\beta, h) = \sum_{\sigma_1 = \sigma_{N+1} = \pm 1} (T^N)_{\sigma_1, \sigma_{N+1}} = \text{Tr}(T^N). \quad (\text{II.15})$$

Partitiofunktio on siis ominaisarvojen avulla

$$Z(\beta, h) = \lambda_+^N + \lambda_-^N, \quad (\text{II.16})$$

koska $V^N \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ominaisarvot ovat λ_+^N ja λ_-^N .

Voimme nyt laskea vapaan energian

$$F = -\frac{1}{\beta} \log Z(\beta, h) = -\frac{1}{\beta} N \log \lambda_+ - \frac{1}{\beta} \log \left(1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^N \right),$$

josta saamme vapaan energian tiheydeksi termodynaamisella rajalla

$$f(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta N} \log Z(\beta, h) = -\frac{1}{\beta} \log \lambda_+.$$

Lasketaan myös magnetisaatio tässä tapauksessa. Se toteuttaa vastaavasti

$$\begin{aligned} m &= \mathbf{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma_k \right] = \frac{1}{N} \partial_h \log Z(\beta, h) \\ &= \partial_h \log \lambda_+ + o(1), \end{aligned}$$

missä tarkemman virhearvion jätämme lukijalle. Kuvassa II.7 on magnetisaatio h :n funktiona eräillä lämpötiloilla. Eksplisiittinen kaava äärettömän ison systeemin magnetisaatiolle

$\partial_h \log \lambda_+$ on helppo kirjoittaa ja havaita, että se on jatkuva h :n funktiona kaikilla β . Ai-noastaan rajalla $\beta \rightarrow \infty$ magnetisaatiosta tulee epäjatkuva.

Edellisessä esimerkissä emme tarvitse T :n ominaisvektoreita. Seuraava tehtävä näyttää, mitä muuta informaatiota Isingin mallista saadaan tällä menetelmällä. Menetelmä on itse asiassa mallin täydellinen ratkaisu, sillä tehtävän tulosta voidaan iteroida ja kirjoittaa mielivaltainen korrelaatiofunktio.

Tehtävä II.4. Tarkastellaan Isingin mallia $\llbracket -N, N \rrbracket$:llä periodisilla reunaehdoilla ja ilman ulkoistamagneettikenttää, eli asetetaan $B = 0$. Merkitään vastaavaa Boltzmannin jakaumaa $P_{N,\beta}$:lla. Osoita, että millä tahansa $i, j \in \mathbb{Z}$ pätee

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,\beta}[\sigma_i = \sigma_j] = \frac{1}{2} \left(1 + (\tanh \beta)^{|i-j|} \right)$$

Riippuuko raja-arvo reunaehdoista?

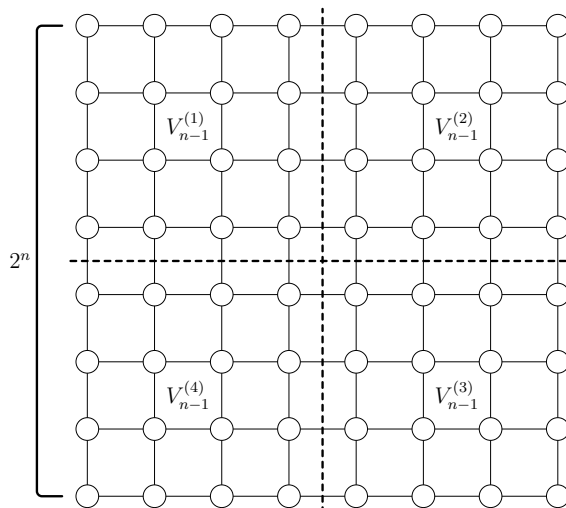
2.3. Vapaan energian termodynaaminen raja hyperkuutiohiloilla

Lause II.21. *Olkoon $V_n = \llbracket 1, 2^n \rrbracket^d$. Vapaa energiatiheys eli raja*

$$f(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta 2^{nd}} \log Z_{V_n}(\beta, h)$$

on olemassa ja äärellinen. Tämä raja ei riipu reunaehdoista.

Todistus. Tarkastellaan Isingin mallia vapailla reunaehdoilla. Todistuksen lopussa otamme huomioon muut reunaehdot.



KUVA II.8. Hyperkuutio $V_n = \llbracket 1, 2^n \rrbracket^d$ jaetaan 2^d :hen osaan, joista jokainen on kopio V_{n-1} :stä.

Merkitään V_n :n Isingin mallin Hamiltonin funktiota H_n :llä ja partitiofunktioita Z_n :llä ja

$$f_n(\beta, h) = -\frac{1}{\beta 2^{dn}} \log Z_n(\beta, B)$$

Jaetaan V_n 2^d :hen kopioon V_{n-1} :stä kuten kuvassa II.8. Kutsutaan näitä osia $V_{n-1}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, 2^d$. Kirjoitetaan Hamiltonin funktio muodossa

$$H_n(\underline{\sigma}) = \sum_{k=1}^{2^d} H_{n-1}^{(k)}(\underline{\sigma}|_{V_{n-1}^{(k)}}) + R_n(\underline{\sigma})$$

missä R_n sisältää kaikki eri $V_{n-1}^{(k)}$:iden välillä olevat vuorovaikutukset. Tällaisia kahden eri $V_{n-1}^{(k)}$:in välisiä viivoja on täsmälleen $d2^{(d-1)n}$ kappaletta, koska V_n jaetaan d :llä tasolla, jotka ovat tyyppiä $x_i = (1+2^n)/2$, joista jokaisen poikki menee $2^{(d-1)n}$ viivaa. Siksi voimme arvioida jäännöstermiä

$$|R_n(\underline{\sigma})| \leq d2^{(d-1)n}$$

tasaisesti kaikilla $\underline{\sigma}$.

Siispä partitiofunktiot toteuttavat

$$\exp\left(-\beta d2^{(d-1)n}\right) (Z_{n-1}(\beta, h))^{2^d} \leq Z_n(\beta, h) \leq \exp\left(\beta d2^{(d-1)n}\right) (Z_{n-1}(\beta, h))^{2^d},$$

josta saamme vapaa energiatiheydelle arvion

$$\begin{aligned} |f_n(\beta, h) - f_{n-1}(\beta, h)| &= \left| \frac{1}{\beta 2^{dn}} \log Z_n(\beta, B) - \frac{1}{\beta 2^{d(n-1)}} \log Z_{n-1}(\beta, B) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\beta 2^{dn}} \log \frac{Z_n(\beta, B)}{(Z_{n-1}(\beta, B))^{2^d}} \right| \\ &\leq \frac{d2^{(d-1)n}}{2^{dn}} = d2^{-n}. \end{aligned}$$

Jos $n_0 \leq m < n$, niin

$$\begin{aligned} |f_n(\beta, h) - f_m(\beta, h)| &= \left| \sum_{k=m+1}^n f_k(\beta, h) - f_{k-1}(\beta, h) \right| \\ &\leq d \sum_{k=m+1}^n 2^{-k} \leq d \sum_{k=n_0+1}^{\infty} 2^{-k} = d2^{-n_0}. \end{aligned}$$

Siispä $(f_n(\beta, h))_{n \geq 1}$ on Cauchyn jono \mathbb{R} :ssä ja siten raja $f(\beta, B) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\beta, B)$ on olemassa.

Muut reunaehdot voidaan nähdä vastaavana virheterminä \tilde{R}_n , jossa vapaisiin reunaehtoihin nähden voi olla eroa vain jokaisessa hyperkuution V_n reunapisteessä. Reunapisteitä on $2d2^{(d-1)n}$ kappaletta ja siksi pätee $|\tilde{R}_n(\underline{\sigma})| \leq 2d2^{(d-1)n}$ tasaisesti kaikille $\underline{\sigma}$. Vastaava päättely kuin yllä osoittaa, että vapaan energian tiheys ei riipu reunaehdoista termodynamiisella rajalla. \square

Huomautus II.22. Voisimme Lauseessa II.21 hyperkuutioiden sijasta valita minkä tahansa kasvan jonon aligraafeja niin, että $V_n \nearrow \mathbb{Z}^d$ kunhan $\#(V_n)_\partial / \#V_n \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Tässä $(V_n)_\partial$ on V_n :n reuna. Todistuksessa kiinnitettäisiin k ja approksimoitaisiin V_n :ää peittämällä se 2^k -sivuisilla hyperkuutioilla.