6. Satunnaiskävelyn palautuvuus ja väistyvyys

Usein statistisessa mekaniikassa mallien kvalitatiiviset(kin) ominaisuudet saattavat olla hyvin erilaisia eri dimensioissa. Ensimmäisenä esimerkkinä tästä tutkimme yksinkertaista satunnaiskävelyä hyperkuutiohiloilla $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2, 3, \ldots$ ja kysymme tuleeko kävely ennen pitkää välttämättä takaisin lähtöpisteeseensä (tässä tapauksessa siis origoon). Osoittautuu, että vastaus riippuu dimensiosta d tämän kappaleen päätuloksen, Lauseen I.88, mukaisesti.

Dimensiossa d yksinkertaisen satunnaiskävelyn askel ξ on tasaisesti jakautunut äärellisellä joukolla

$$\left\{ \underline{v} \in \mathbb{Z}^d \;\middle|\; \|\underline{v}\| = 1 \right\}.$$

Jos merkitsemme $\mathbb{R}^d$:n standardikannan vektoreita

$$\underline{e}_i = [\underbrace{0\;0\;\cdots\;0\;\overset{i:\text{s}}{1}\;0\;\cdots\;0}_{d\text{ komponenttia}}]^\top, \qquad i = 1, 2, \ldots, d,$$

niin askeleen ξ jakauma on

$$\mathsf{P}[\xi = +\underline{e}_i] = \mathsf{P}[\xi = -\underline{e}_i] = \frac{1}{2d} \qquad \text{kaikilla } \; i = 1, 2, \ldots, d.$$

Määritelmä I.87. Yksinkertainen satunnaiskävely d-ulotteisella hyperkuutiohilalla $\mathbb{Z}^d$ on $S = (S_t)_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$, missä $S_t = \sum_{k=1}^t \xi_k$, ja kävelyn askeleet $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita tasaisen jakauman mukaan joukolla $\left\{ \underline{v} \in \mathbb{Z}^d \mid \|\underline{v}\| = 1 \right\}$.

Tehtävä I.18. Olkoon $S = (S_t)_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ yksinkertainen satunnaiskävely neliöhilalla $\mathbb{Z}^2$, eli $S_t = \sum_{k=1}^t \xi_k$, missä askeleet $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita,

$$\mathsf{P}\big[\xi_k = \underline{e}_1\big] = \mathsf{P}\big[\xi_k = -\underline{e}_1\big] = \mathsf{P}\big[\xi_k = \underline{e}_2\big] = \mathsf{P}\big[\xi_k = -\underline{e}_2\big] = \frac{1}{4},$$
$$\text{missä} \quad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Merkitään S:n koordinaattiprosesseja X:llä ja Y:llä — siten, että

$$S_t = \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix}.$$

(a) Osoita, että prosessit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ja $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eivät ole keskenään riippumattomat.
(b) Asetetaan $U_t = X_t + Y_t$ ja $V_t = X_t - Y_t$. Osoita, että prosessit $U = (U_t)_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ja $V = (V_t)_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ovat keskenään riippumattomat ja molempien jakauma on yksinkertainen 1-ulotteinen satunnaiskävely $\mathbb{Z}$:lla.

Lause I.88. *Olkoon $S = (S_t)_{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ yksinkertainen satunnaiskävely d-ulotteisella hyperkuutiohilalla $\mathbb{Z}^d$.*

Jos $d \leq 2$, niin yksinkertainen satunnaiskävely on palautuva*, millä tarkoitamme, että kävely melkein varmasti palaa lähtöpisteeseensä:*

$$\mathsf{P}\big[\{\textit{jollakin } t > 0 \textit{ pätee } S_t = \underline{0}\}\big] = 1.$$

Jos $d > 2$, niin yksinkertainen satunnaiskävely on väistyvä, *millä tarkoitamme, että kävelyllä on positiivinen todennäköisyys olla palaamatta lähtöpisteeseensä:*

$$\mathsf{P}[\{\textit{jollakin } t > 0 \textit{ pätee } S_t = \underline{0}\}] < 1.$$

Huomautus I.89. Dimensioiden $d = 2$ ja $d = 3$ kvalitatiivista eroa voidaan havainnollistaa seuraavalla tarinalla. Mallintakoon satunnaiskävely $\mathbb{Z}^2$:lla juopunutta henkilöä ruutukaavaa noudattavassa kaupungissa, esim. Manhattanilla, ja satunnaiskävely $\mathbb{Z}^3$:ssa juopunutta avaruusoliota kolmiulotteista ruutukaavaa noudattavalla avaruusaluksella. Ylläoleva tulos sanoo, että juopunut henkilö löytää varmasti ennen pitkää kotiinsa, kun taas juopuneella avaruusoliolla on todellinen riski jäädä ikiajoiksi eksyksiin. Emme kuitenkaan kehota kokeilemaan tätä käytännössä, koska tapaus $d = 2$ on vain vaivoin riittävä palautuvuudelle, kuten tulemme näkemään.

Huomautus I.90. Koska d on kokonaisluku, dimensiota koskeva ehto $d > 2$ on toki yhtäpitävä ehdon $d \geq 3$ kanssa. Kirjoitamme ehdot ylläolevassa muodossa, koska hyppäys kvalitatiivisessa käyttäytymisessä tapahtuu tietyssä mielessä ennemminkin kohdassa $d = 2$ kuin kohdassa $d = 3$. On esimerkiksi mahdollista määritellä vastaavanlaisen kysymyksen yleistyksiä, joissa d voi olla mielivaltainen reaaliluku, ja hyppäys todella tapahtuu edellämainitussa.

Todistus. Todistamme nyt, että satunnaiskävely $\mathbb{Z}^d$:llä on palautuva jos $d \leq 2$ ja väistyvä, jos $d > 2$. Merkitään p:llä todennäköisyyttä sille, että satunnaiskävely joskus palaa origoon,

$$p = \mathsf{P}\left[\{\exists t > 0 \text{ s.e. } S_t = \underline{0}\}\right].$$

Tarkastellaan origoon tehtävien vierailujen lukumäärää

$$L = \#\left\{t \geq 0 \,\middle|\, S_t = \underline{0}\right\} = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_t = \underline{0}\}}$$

ja sen odotusarvoa

$$\mathsf{E}[L] = \sum_{t=0}^{\infty} \mathsf{P}\left[\{S_t = \underline{0}\}\right].$$

Jos kävely palaa vähintään kerran origoon, sen jatko ensimmäisen tällaisen hetken jälkeen on uusi, riippumaton satunnaiskävely, joka palaa origoon samalla todennäköisyydellä kuin alkuperäinenkin. Tätä iteroiden huomataan, että $\mathsf{P}\left[\{L \geq n\}\right] = p^{n-1}$, ja siten helposti lasketaan L:n odotusarvo

$$\mathsf{E}\left[L\right] = \sum_{n=0}^{\infty} p^n = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{jos } p < 1 \\ +\infty & \text{jos } p = 1 \end{cases}$$

Palautuvuus ja väistyvyys voidaan siis luonnehtia myös satunnaismuuttujan L avulla: satunnaiskävely on väistyvä ($p < 1$) tai palautuva ($p = 1$) jos $\mathsf{E}[L]$ on äärellinen tai ääretön, vastaavasti.[15]

Yleistetään kysymystä sitten hieman. Olkoon $\lambda < 1$ parametri, jota käytämme saadaksemme kaikista suureista väliaikaisesti äärellisiä. Pisteeseen $\underline{x} \in \mathbb{Z}^d$ tehtävien vierailujen λ-painotettu lukumäärä määritellään kaavalla

$$L_\lambda(\underline{x}) = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \mathbb{1}_{\{S_t = \underline{x}\}}, \text{ ja vastaava odotusarvo}$$

$$G_\lambda(\underline{x}) = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \mathsf{P}\left[\{S_t = \underline{x}\}\right].$$

[15]Ensimmäisessä tapauksessa tietenkin pätee $\mathsf{P}[\{L < \infty\}] = 1$, ja jälkimmäisessä itseasiassa $\mathsf{P}[\{L = \infty\}] = 1$.

Erityisesti siis $\mathsf{E}[L] = \lim_{\lambda \nearrow 1} \big(G_\lambda(\underline{0})\big)$ (monotonisen konvergenssin lauseen nojalla). Osoittautuu, että yleisempi suure $G_\lambda(\underline{x})$ on tavallaan helpompi laskea[16] — se nimittäin toteuttaa differenssiyhtälön, jonka ratkaisemiseksi voimme käyttää Fourier analyysiä.

Differenssiyhtälö funktiolle $G_\lambda(\underline{x})$ saadaan *ensimmäisen askeleen analyysillä* tarkastelemalla satunnaiskävelyn ensimmäistä askelta ja huomaamalla, että ensimmäisen askeleen $\xi_1 = \pm \underline{e}_j$ jälkeen vierailut pisteeseen $\underline{x}$ käyttäytyvät kuten alkuperäisen kävelyn vierailut pisteeseen $\underline{x} \mp \underline{e}_j$. Koska ensimmäinen askel on todennäköisyydellä $\frac{1}{2d}$ annettu koordinaattiakselilla oleva yksikkövektori, saamme siis

$$\begin{aligned} G_\lambda(\underline{x}) &= \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \mathsf{P}\left[\{S_t = \underline{x}\}\right] \\ &= \delta_{\underline{x},\underline{0}} + \sum_{t=1}^{\infty} \lambda^t \mathsf{P}\left[\{S_t = \underline{x}\}\right] \\ &= \delta_{\underline{x},\underline{0}} + \frac{1}{2d}\left(\lambda G_\lambda(\underline{x} - \underline{e}_1) + \lambda G_\lambda(\underline{x} + \underline{e}_1) + \lambda G_\lambda(\underline{x} - \underline{e}_2) + \cdots\right) \\ &= \delta_{\underline{x},\underline{0}} + \frac{\lambda}{2d} \sum_{j=1}^{d} \big(G_\lambda(\underline{x} + \underline{e}_j) + G_\lambda(\underline{x} - \underline{e}_j)\big). \end{aligned}$$

Tämä differenssiyhtälö on helppo ratkaista ottamalla *diskreetin avaruuden Fourier-muunnos*[17]

$$\hat{G}_\lambda(\underline{k}) = \sum_{\underline{x} \in \mathbb{Z}^d} e^{-\mathrm{i}\underline{k}\cdot\underline{x}} G_\lambda(\underline{x}), \tag{I.36}$$

jonka avulla itse funktio G_λ lausutaan seuraavasti

$$G_\lambda(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} e^{\mathrm{i}\underline{k}\cdot\underline{x}} \hat{G}_\lambda(\underline{k}) \, \mathrm{d}^d \underline{k}. \tag{I.37}$$

Kertomalla differenssiyhtälö $e^{-\mathrm{i}\underline{k}\cdot\underline{x}}$:llä ja summaamalla yli $\underline{x}$:n, saadaan Fourier-muunnokselle yhtälö

$$\hat{G}_\lambda(\underline{k}) = 1 + \frac{\lambda}{2d} \sum_{j=1}^{d} (e^{\mathrm{i}\underline{k}\cdot\underline{e}_j} + e^{-\mathrm{i}\underline{k}\cdot\underline{e}_j}) \hat{G}_\lambda(\underline{k}),$$

joka ratkeaa yhteen- ja jakolaskulla,

$$\hat{G}_\lambda(\underline{k}) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{d}\sum_{j=1}^{d} \cos(k_j)}.$$

Saamme siis

$$G_\lambda(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}k_1 \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}k_d \, \frac{e^{\mathrm{i}\underline{k}\cdot\underline{x}}}{1 - \frac{\lambda}{d}\sum_{j=1}^{d} \cos(k_j)}.$$

Tähän asti parametri $\lambda < 1$ on turvallisesti pitänyt kaikki suureet äärellisinä. Seuraavaksi kuitenkin otamme kiinnostavan rajan $\lambda \to 1$. Satunnaiskävelymme palautuvuus tai väistyvyys redusoituu siis kysymykseksi siitä, onko

$$\mathsf{E}[L] = \lim_{\lambda \nearrow 1} G_\lambda(\underline{0}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \times \lim_{\lambda \nearrow 1} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{d}\sum_{j=1}^{d} \cos(k_j)} \, \mathrm{d}\underline{k}. \tag{I.38}$$

ääretön vai äärellinen.

[16] Kun $\lambda = 1$, suuretta G_λ kutsutaan usein Greenin (generoivaksi) funktioksi, ja kun $\lambda < 1$ sitä kutsutaan toisinaan massiiviseksi Greenin funktioksi.

[17] Fourier-muunnos (I.36) on määritelty, kun muunnettava funktio on absoluuttisesti summautuva, eli tässä $\sum_{\underline{x} \in \mathbb{Z}^d} |G_\lambda(\underline{x})| < \infty$. Samalla oletuksella käänteismuunnos (I.37) pätee Fubinin lauseen perusteella. Absoluuttinen summautuvuus tässä tapauksessa seuraa siitä, että kaikilla $|\lambda| < 1$ pätee $|G_\lambda(\underline{x})| \leq (|\lambda|^{d_{\mathbb{Z}^d}(\underline{x},\underline{0})})/(1 - |\lambda|)$, missä $d_{\mathbb{Z}^d}(\underline{x}, \underline{0})$ on lyhimmän polun, joka yhdistää $\underline{0}$:n ja $\underline{x}$:n $\mathbb{Z}^d$:llä, pituus.

Huomaamme, että $\underline{k} = \underline{0}$ ympäristön ulkopuolella (I.38) pysyy rajoitettuna, mutta $\underline{k} = \underline{0}$:aan syntyy singulariteetti, jonka integroituvuutta joudumme arvioimaan. Rajan $\lambda \nearrow 1$ ottamista ja L integroituvuuden arvioimiseksi jaamme integaalin kahteen alueeseen asettamalla

$$R_0 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^d, \qquad R_1 = [-\pi, \pi]^d \setminus R_0.$$

Joukossa R_1 kaikilla $\underline{k}$ on jokin j, jolle pätee, että $\cos(k_j) < 0$. Siksi

$$0 \leq \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{d}\sum_{j=1}^d \cos(k_j)} = \frac{1}{\frac{1}{d}\sum_{j=1}^d 1 - \lambda\cos(k_j)} \leq d.$$

Dominoidun konvergenssin lauseen perusteella

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\lim_{\lambda\nearrow 1}\int_{R_1}\frac{\mathrm{d}k_1\ldots\mathrm{d}k_d}{1 - \frac{\lambda}{d}\sum_{j=1}^d \cos(k_j)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{R_1}\frac{\mathrm{d}k_1\ldots\mathrm{d}k_d}{1 - \frac{1}{d}\sum_{j=1}^d \cos(k_j)} \leq d < \infty.$$

Eli integraali R_1:n yli pysyy äärellisenä rajalla $\lambda \nearrow 1$ millä tahansa d.

Joukossa R_0 kaikilla $\underline{k}$ ja kaikilla j pätee, että $\cos(k_j) \geq 0$. Siispä integrandit ovat kasvavia, kun $\lambda \nearrow 1$, ja

$$0 \leq \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{d}\sum_{j=1}^d \cos(k_j)} \nearrow \frac{1}{1 - \frac{1}{d}\sum_{j=1}^d \cos(k_j)},$$

joka on äärellinen kaikilla $R_0 \setminus \{0\}$. Monotonisen konvergenssin lauseen perusteella voimme viedä rajan integraalin sisälle

$$\lim_{\lambda\nearrow 1}\int_{R_0}\frac{\mathrm{d}k_1\ldots\mathrm{d}k_d}{1 - \frac{\lambda}{d}\sum_{j=1}^d \cos(k_j)} = \int_{R_0}\frac{\mathrm{d}k_1\ldots\mathrm{d}k_d}{1 - \frac{1}{d}\sum_{j=1}^d \cos(k_j)} = \int_{R_0}\frac{\mathrm{d}k_1\ldots\mathrm{d}k_d}{\frac{1}{d}\sum_{j=1}^d 1 - \cos(k_j)}.$$

Huomaamme Taylor-kehitelmästä, että $\cos(k_j) = 1 - \frac{1}{2}k_j^2 + \mathcal{O}(k_j^4)$, kun $k_j \approx 0$, ja siksi voimme arvioida $(1 - \cos(k_j)) \approx \frac{1}{2}k_j^2$. Täsmällisemmin käytämme epäyhtälöä $(4/\pi^2)k^2 \leq (1 - \cos(k)) \leq (1/2)k^2$, joka pätee, kun $k \in [-\pi/2, \pi/2]$. Tämän perusteella

$$\int_{R_0}\frac{\mathrm{d}k_1\ldots\mathrm{d}k_d}{1 - \frac{1}{d}\sum_{j=1}^d \cos(k_j)} < \infty \quad\Longleftrightarrow\quad \int_{R_0}\frac{\mathrm{d}k_1\ldots\mathrm{d}k_d}{\sum_{j=1}^d k_j^2} < \infty.$$

Havaitsemme, että satunnaiskävely on väistyvä jos ja vain jos integraali

$$\int_{\{\|\underline{k}\|\leq 1\}}\frac{\mathrm{d}k_1\ldots\mathrm{d}k_d}{\|\underline{k}\|^2} = \int_0^1 C_d\, r^{d-3}\mathrm{d}r$$

on äärellinen. Tämä integraali on äärellinen, kun $d > 2$, ja siispä satunnaiskävely on väistyvä, kun $d = 3, 4, \ldots$, ja palautuva, kun $d = 1, 2$. Huomataan myös, että kun $d = 2$, tämä integraali divergoi juuri ja juuri (vain logaritmisesti). □

Huomautus I.91. Vaihtoehtona yllä olevalle todistukselle voisimme arvioida summaa $\mathsf{E}[L] = \sum_{t=0}^{\infty} \mathsf{P}[\{S_t = \underline{0}\}]$ Stirlingin approksimaatiolla. Jätämme tämän harjoitustehtäväksi lukijalle.