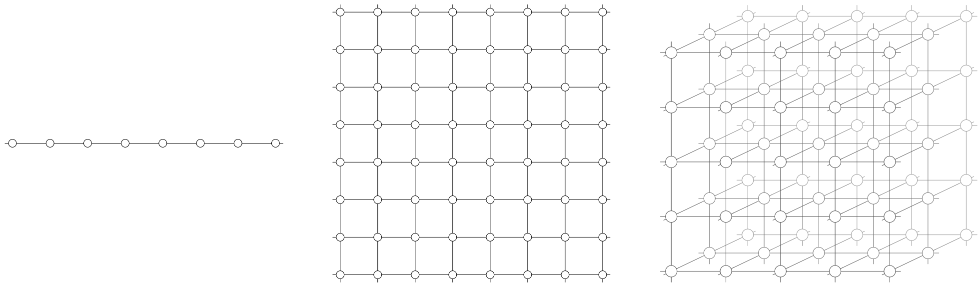


(a) Lineaarinen hila (b) Neliöhila (c) Kuutiohila

KUVA I.8. Kuutiohiloja $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2, 3$.

5. Satunnaiskävely

Satunnaiskävely on erittäin tärkeä todennäköisyyslaskennan ja statistisen fysiikan malli. Se on diskreetti versio Brownin liikkeestä. Fysikaalisena ilmiönä se vastaa diffuusiosta ja siten se mallintaa esimerkiksi lämpötilajakauman aikakehitystä tai kahden nesteen sekoittumista. Kuten edellisessä luvussa, tämä malli on määritellään riippumattomien satunnaismuuttujien summana, mutta ajattelemme t:tä S_t:ssä aikaparametrina ja nyt olemme kiinnostuneita kokoelman $S = (S_t)_{t\in\mathbb{N}} = (S_0, S_1, S_2, \ldots)$ yhteisjakaumasta. Erityisesti tässä luvussa olemme kiinnostuineita S:stä ja äärellisistä t — kysymyksistä kuten, milloin S_t saavuttaa tason b, mikä on S_u:n, $0 \le u \le t$, suurin arvo tähän mennessä jne.

5.1. Satunnaiskävely $\mathbb{Z}$:lla

Määrittelemme *satunnaiskävelyn* $\mathbb{Z}$*:lla* $S = (S_t)_{t\in\mathbb{N}}$ seuraavasti:

Määritelmä I.75. Olkoon $p \in [0, 1]$. Edellisen luvun tapaan olkoon X_k, $k \ge 1$, riippumattomia ja samoin jakautuneita, mutta nyt valitsemme erityisen jakauman $P(X_k = +1) = p$ ja $P(X_k = -1) = 1 - p =: q$. Pisteestä $x_0 \in \mathbb{Z}$ lähetetty $S = (S_t)_{t\in\mathbb{N}}$, *satunnaiskävely* $\mathbb{Z}$*:lla parametrilla* p, määritellään siten, että jokaisella t

$$S_t = x_0 + \sum_{k=1}^{t} X_k. \tag{I.20}$$

Jos $p = q = 1/2$, kutsumme tätä *symmetriseksi* tai *yksinkertaiseksi satunnaiskävelyksi.*

Huomautus I.76.

(1) Kutsumme parametria t *ajaksi.*
(2) $S = (S_t)_{t\in\mathbb{N}}$ on kokoelma satunnaismuuttujia, jonka määrittelemisksi annoimme yhteisjakauman.
(3) $S = (S_t)_{t\in\mathbb{N}}$ on stokastinen prosessi (kts. Määritelmä I.77 alla), jonka aika ja avaruus ovat diskreettejä.
(4) $S = (S_t)_{t\in\mathbb{N}}$:n jakauma on määritelty luonnollisesti seuraavalla diskreettien polkujen todennäköisyysavaruudella: perusjoukko on $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Kaikilla $\omega = (\omega_t)_{t\in\mathbb{N}}$ ja kaikilla $t \in \mathbb{N}$, määrittelemme koordinaattikuvauksen $S_t(\omega) = \omega_t$. Sigma-algebra $\mathcal{F}$ sisältää ainakin sylinteritapahtumat $\{S_j \in [\![a_j, b_j]\!], j = 0, 1, \ldots, k\}$ ja mitta P määräytyy vaatimuksesta,

että kaikilla k ja kaikilla jonoilla $(x_j)_{j\in[\![0,k]\!]}$, joille $|x_j - x_{j-1}| = 1$, pätee että

$$\mathsf{P}(S_j = x_j, \forall j \in [\![0,k]\!]) = p^{n_+}q^{n_-}.$$

Tässä n_+ on askelten $X_j = S_j - S_{j-1} = +1$ lukumäärää ja n_- askelten $X_j = -1$ lukumäärä, missä $j \in [\![1,k]\!]$.

(5) Annetulla ajanhetkellä t, S_t:n jakauma voidaan lausua binomijakauman avulla seuraavasti. Olkoon $t \in \mathbb{Z}_+$ ja $m \in \mathbb{Z}$ siten, että $-t \le m \le t$ ja $m + t$ on parillinen (muutoin $\mathsf{P}(S_t = x_0 + m) = 0$). Todennäköisyys $\mathsf{P}(S_t = x_0 + m)$ voidaan laskea niin, että merkitsemällä n_+ askelten $X_k = +1$ lukumäärää ja n_- askelten $X_k = -1$ lukumäärää ajanhetkeen t mennessä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} n_+ - n_- = m \\ n_+ + n_- = t, \end{cases} \tag{I.21}$$

jonka ratkaisu on $n_+ = (t + m)/2$, $n_- = (t - m)/2$. Siispä

$$\mathsf{P}(S_t = x_0 + m) = \binom{t}{\frac{t+m}{2}} p^{(t+m)/2} q^{(t-m)/2}. \tag{I.22}$$

(6) Kun $p > 1/2$, $S_t \to +\infty$ melkein varmasti, kun $t \to \infty$, suurten lukujen lain mukaan. Vastaavasti kun $p < 1/2$, $S_t \to -\infty$ melkein varmasti, kun $t \to \infty$. Voidaan osoittaa, että kun $p = 1/2$, $\limsup_t S_t = +\infty$ and $\liminf_t S_t = -\infty$. Tämä seuraa esim. Tehtävästä I.15.

Satunnaiskävely on ensimmäinen *stokastinen prosessi*, jonka kohtaamme.

Määritelmä I.77. Diskreettiaikainen *stokastinen prosessi* tila-avaruudessa X on aikaparametrin $t \in \mathbb{Z}_+$ parametrisoima kokoelma satunnaismuuttujia $(S_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ samalla todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ siten, että $S_t : \Omega \to X$.

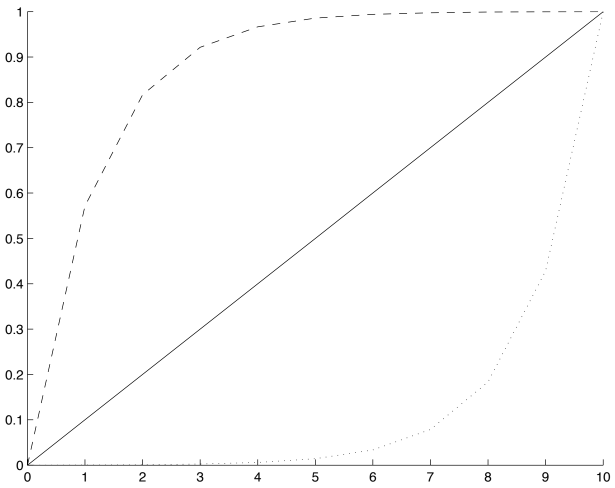
Huomautus I.78. Mikä tahansa diskreetti joukko (äärellinen tai numeroituvasti ääretön) $\mathcal{T}$ voisi olla aikaparametrisaationa. Yleensä stokastisen prosessin ideaan liittyy se, miten yhdeltä ajanhetkeltä edetään seuraavaan, eli $\mathcal{T}$:n järjestyksellä on väliä. Kohtaamme myöhemmin jatkuva-aikaisia stokastisia prosesseja jolloin $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ tai $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$.

Huomautettakoon vielä, että stokastisen prosessin määritelmä on niin yleinen, ettei järkevää yleistä teoriaa ole olemassa. Usein tällaiset teoriat koskevat jotain pienempää ryhmää kuten gaussisia prosesseja, stationaarisia prosesseja jne.

5.1.1. *Ensimäinen esimerkki "ensimmäisen askeleen analyysistä": uhkapelaajan vararikko*

Usein on hyödyllistä, että voimme vaihtaa satunnaiskävelyn alkupistettä. Merkitsemme ehdollisen todennäköisyyden merkintää käyttäen $\mathsf{P}[\,\cdot \mid S_0 = x]$ satunnaiskävelyn todennäköisyysmittaa, jolla $S_0 = x$ todennäköisyydellä yksi.

Johdamme muutaman yksinkertaisen tuloksen koskien satunnaiskävelyä käyttämällä ns. *ensimmäisen askeleen analyysiä*, jossa laskemme meitä kiinnostavan suuren ajanhetkellä $t = 0$ vastaavan suureen ajanhetkellä $t = 1$ avulla johtaen samalla yhtälön, jonka kiinnostava suure toteuttaa. Tässä tarvitsemme vain $(S_t)_{t\in\mathbb{N}}$:n *Markov-ominaisuutta*: jos $(S_t)_{t\in\mathbb{N}}$ on pisteestä x lähetetty satunnaiskävely ja $y \in \mathbb{Z}$ siten että $|x - y| = 1$, niin prosessin $(\tilde{S}_t)_{t\in\mathbb{N}} = (S_{t+1})_{t\in\mathbb{N}}$ jakauma ehdollistettuna tapahtumalle $\{S_1 = y\}$ sama kuin pisteestä y lähetetyn satunnaiskävelyn jakauma. Tämä seuraa kokoelman $(X_n)_{n>0}$ riippumattomuudesta.



KUVA I.9. Kaksi uhkapelaajaa, A ja B, pelaavat peliä, jonka yhden kierroksen voittaja saa toiselta 1 rahayksikön. A voittaa todennäköisyydellä p ja B voittaa todennäköisyydellä $q = 1 - p$ yhden kierroksen. Uhkapelaajat pelaavat peliä tietysti siihen asti kunnes jompikumpi kokee vararikon. Kuvassa pelaajien yhteisvarallisuus on 10 ja kuvaajat esittävät pelaajan A todennäköisyyttä voittaa koko peli, kun x-akselilla on tämän pelaajan alkuvarallisuus. Kuvaajat esittävät yhtälön (I.23) määrittämää $x \mapsto h(x)$, kun $a = 0, b = 10$ ja alhaalta ylös lueteltuna $p = 0.3$, $p = 0.5$ ja $p = 0.7$.

Olkoon kokonaisluvut $a < b$ ja $x \in [\![a, b]\!]$. Määritellään

$$h(x) = \mathsf{P}\left[S_{\tau_{\{a,b\}}} = b \,\middle|\, S_0 = x\right]$$

missä

$$\tau_{\{a,b\}} = \min\{t \geq 0 \,:\, S_t \in \{a, b\}\}$$

Katso h:n tulkinta Kuvasta I.9.

Lause I.79. *Olkoon* $0 < p < 1$. *Silloin*

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \textit{kun } p = q = 1/2 \\ \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x-a}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{b-a}} & \textit{muulloin.} \end{cases} \tag{I.23}$$

Todistus. Selvästi $h(b) = 1$ ja $h(a) = 0$. Olkoon $a < x < b$. Koska $\mathsf{P}[S_1 = x + 1 \,|\, S_0 = x] = p$ ja $\mathsf{P}[S_1 = x - 1 \,|\, S_0 = x] = q$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{y=x\pm1} \mathsf{P}\left[S_1 = y \,|\, S_0 = x\right] \mathsf{P}\left[S_{\tau_{\{a,b\}}} = b \,|\, S_0 = x \text{ ja } S_1 = y\right] \\ &= ph(x+1) + qh(x-1), \end{aligned} \tag{I.24}$$

missä Markov-ominaisuutta.

Yhtälö (I.24) on vakiokertoiminen differenssiyhtälö jonka yleinen ratkaisu voitaisiin etsiä yritteellä $h(x) = z^x$. Etsimme ratkaisun kuitenkin hieman eri tavalla jolloin tapaus $p = q = 1/2$ tulee hoidettua samalla.

Kirjoitetaan yhtälö (I.24) muotoon

$$h(x+1) - h(x) = \frac{q}{p}(h(x) - h(y)),$$

mistä saadaan

$$h(x+1) - h(x) = C\left(\frac{q}{p}\right)^{x-a}$$

missä $C = h(a+1) - h(a)$. Summaamalla tämä yhtälö a:sta $x-1$:een saadaan

$$h(x) = C\sum_{k=0}^{x-a-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{k}. \tag{I.25}$$

Tarkastellaan ensin erikoistapaus $p = q = 1/2$. Silloin

$$h(x) = C(x-a) = \frac{x-a}{b-a}$$

koska vaatimuksesta $h(b) = 1$ seuraa $C = 1/(b-a)$.

Kun $p \neq q$,

$$h(x) = C\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x-a}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)} = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x-a}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{b-a}}$$

missä jälleen käytimme ehtoa $h(b) = 1$. □

5.2. Stirlingin kaava ja satunnaiskävelyn raja-arvolauseet

Tässä luvussa oletamme, että $p = q = 1/2$, joka hieman yksinkertaistaa kaavoja.

Aloitamme tämän luvun erittäin klassisella approksimaatiotuloksella (Stirling ja de Moivre työskentelivät 1700-luvulla). Sen jälkeen sovellamme tätä tulosta satunnaiskävelyyn ja osoitamme, että satunnaiskävelylle pätee keskeinen raja-arvolause ja suurten poikkeamien lause.

Lemma I.80 (Stirlingin approksimaatio)**.** *Kun $n \to \infty$*

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,\left(1 + \mathcal{O}\left(n^{-1}\right)\right). \tag{I.26}$$

Jäteämme todistuksen harjoitustehtäväksi. Vinkkinä voidaan mainita, että kannattaa käyttää gamma-funktion integraaliesitystä, jonka mukaan $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\mathrm{d}x$. Otimme yllä myös mukaan tarkemman virhearvion.

5.2.1. *Satunnaiskävelyn keskeinen raja-arvolause*

Merkitsemme $a_n \simeq b_m$ jos ja vain jos $a_n/b_n \to 1$, kun $n \to \infty$. Stirlingin approksimaation avulla voimme osoittaa seuraavanlaisen keskeisen raja-arvolauseen.

Lause I.81. *Jos $2k_n \simeq \sqrt{2n}x$ niin* $\mathsf{P}[S_{2n} = x_0 + 2k_n] \simeq (\pi n)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$.

Huomautus I.82. Kuten edellä totesimme, $S_t - S_0 + t$ on aina parillinen. Siksi yksinkertaisuuden takia tämä lause on muotoiltu parillisille t.

Todistus. Olkoon $k = k_n$ kuten yllä. Stirlingin approksimaation perusteella

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n+k} &= \frac{(2n)!}{(n-k)!\,(n+k)!} \\ &\simeq \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi(2n)}}{(n-k)^{n-k}(n+k)^{n+k}e^{-2n}2\pi\sqrt{(n-k)(n+k)}} \\ &= 2^{2n}\underbrace{\sqrt{\frac{2n}{2\pi(n^2-k^2)}}}_{\simeq(\pi n)^{-1/2}}\underbrace{\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)^{-n}}_{\simeq\exp(+x^2/2)}\underbrace{\left(1-\frac{k}{n}\right)^{k}}_{\simeq\exp(-x^2/2)}\underbrace{\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}}_{\simeq\exp(-x^2/2)}\end{aligned} \tag{I.27}$$

missä käytämme tietoa, että $k_n^2/n \to x^2/2$. □

Tämä lause yleistyy helposti seuraavaksi tulokseksi (joka esiintyy jo Abraham de Moivre'n teoksessa *The Doctrine of Chances*, 1738), joka on eräs keskeisen raja-arvolauseen muoto ja kertoo olennaisesti, että binomijakaumaa voidaan approksimoida normaalijakaumalla heikon suppenemisen mielessä. Ohitamme todistuksen.

Lause I.83 (De Moivre–Laplace)**.** *Jos $a < b$, niin*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}[a \le S_n/\sqrt{n} \le b] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}\mathrm{d}x \tag{I.28}$$

5.2.2. *Satunnaiskävelyn suuret poikkeamat*

Todistamme seuraavan binomikertoimien suuruutta arvioivan lauseen, jota tulemme käyttämään myös Osan II Luvussa 3.

Lause I.84 (Cramér-entropia)**.** *Jos $x \in (-1,1)$, ja $k_n = n(1+x)/2 + \mathcal{O}(1)$, kun $n \to \infty$, niin*

$$\log\binom{n}{k_n} = n\left(\log(2) - I(x)\right) + \mathcal{O}(\log(n)),$$

missä $I(x)$ on Cramér-entropia

$$I(x) = \frac{1+x}{2}\log(1+x) + \frac{1-x}{2}\log(1-x)\,. \tag{I.29}$$

Todistus. Olkoon $k \in \{0,1,\ldots n\}$ siten, että $k = k_n = n(1+x)/2 + \mathcal{O}(1)$ kun $n \to \infty$. Stirlingin approksimaation perusteella

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{(n)!}{(k)!\,(n-k)!} \\ &= \frac{(n)^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{k^k(n-k)^{n-k}e^{-n}2\pi\sqrt{k(n-k)}}(1+\mathcal{O}(1/n)) \\ &= 2^n\underbrace{\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}}_{J_1:=}\underbrace{\left(2\frac{k}{n}\right)^{-k}}_{J_2:=}\underbrace{\left(2\frac{n-k}{n}\right)^{-n+k}}_{J_3:=}.\end{aligned}$$

Näitä voimme arvioida niin, että

$$\log J_1 = \mathcal{O}(\log(n))$$
$$\log J_2 = -k\log\left(2\frac{k}{n}\right) = -\left[\frac{1+x}{2}\log(1+x)\right] n\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$\log J_3 = -(n-k)\log\left(2\frac{n-k}{n}\right) = -\left[\frac{1-x}{2}\log(1-x)\right] n\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

mistä väite seuraa. □

Edellisen lauseen avulla voimme todistaa seuraavan tuloksen.

Lause I.85. *Jos* $0 < a < 1$, *niin* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\log \mathsf{P}[S_{2n} \geq x_0 + 2na] = -I(a)$, *missä* $I(a)$ *on funktio* (I.29).

Todistus. Olkoon

$$k_n^* = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq an\}.$$

Silloin $k_n^* = an + \mathcal{O}(1)$ ja siksi $n + k_n^* = 2n((1+a)/2) + \mathcal{O}(1)$. Lauseen I.84 perusteella

$$\log\binom{2n}{n+k_n^*} = 2n\left(\log(2) - I(x)\right) + \mathcal{O}(\log(n)).$$

Merkitään $p_{n,k} = \mathsf{P}[S_{2n} = x_0 + 2k]$. Silloin $p_{n,k} \leq p_{n,k_n^*}$ kaikilla $k \geq k_n^*$ ja siksi

$$p_{n,k_n^*} \leq \mathsf{P}[S_{2n} \geq x_0 + 2na] = \sum_{k=k^*}^{n} p_{n,k} \leq (n - k_n^* + 1)p_{n,k_n^*} \leq np_{n,k_n^*}$$

Siispä

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\log \mathsf{P}[S_{2n} \geq x_0 + 2na] &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\log p_{n,k_n^*} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}\log\binom{2n}{n+k_n^*} + \frac{1}{2n}\log 2^{-2n}\right) = -I(a)\end{aligned}$$

missä $I(a)$ on kuten väitteessä. □

Tehtävä I.14. Jos $\mathsf{P}[X_1 = k] = e^{-1}/k!$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $(X_n)_{n\geq 1}$ ovat samoin jakautuneita, niin osoita, että kaikilla $a > 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathsf{P}[S_n \geq na] = a - 1 - a\log a.$$

5.3. Esimerkki ”ensimmäisen askeleen analyysistä”

Tässä luvussa jatkamme Luvun 5.1.1 menetelmän soveltamista. Laskemme satunnaiskävelyn erään poistumisajan jakauman.

Tehtävä I.15. Olkoon $a < b$ kokonaislukuja ja $\tau_{\{a,b\}}$ satunnaiskävelyn poistumisaika väliltä $[\![a, b]\!]$ ja olkoon $\tau_{\{b\}}$ satunnaiskävelyn poistumisaika väliltä $[\![-\infty, b]\!]$.

(a) Osoita, että kaikilla $x \in [\![a, b]\!]$ pätee $\mathsf{E}[\tau_{\{a,b\}} \mid S_0 = x] < \infty$.
(b) Laske ensimmäisen askeleen analyysin avulla $\mathsf{E}[\tau_{\{a,b\}} \mid S_0 = x]$, kun $p = q$.
(c) Osoita, että kaikilla $x < b$ pätee $\mathsf{P}[\tau_{\{b\}} < \infty \mid S_0 = x] = 1$, kun $p \geq q$.

5.3.1. *Välin $[\![-\infty, n]\!]$ poistumisajan jakauma*

Oletamme nyt, että $p = q = 1/2$, eli tarkastelemme *symmetristä satunnaiskävelyä*. Yleinen tapaus saadaan melko helposti erikoistapauksesta.

Olkoon $n \geq 1$ ja määritellään

$$\tau_n = \min\{t \geq 0 \,:\, S_t = n\}.$$

Tässä luvussa haluamme määrittää τ_1:n jakauman, kun $S_0 = 0$. Tätä tarkoitusta varten kirjoitamme todennäköisyydet $P[\tau_1 = k \,|\, S_0 = 0]$ *todennäköisyydet generoivan funktion* muotoon

$$\phi(z) = \mathsf{E}[z^{\tau_1} \,|\, S_0 = 0] = \sum_{k=0}^{\infty} P[\tau_1 = k \,|\, S_0 = 0] z^k, \tag{I.30}$$

missä $|z| < 1$. Jos $\tau_1 = \infty$, on järkevää asettaa $z^{\tau_1} = 0$. Huomataan, että Tehtävän I.15 mukaan $\tau_1 < \infty$. Lisäksi myöhemmin näemme, että $\lim_{z \nearrow 1} \phi(z) = 1$, minkä avulla voimme myös todistaa τ_1:n äärellisyyden.

Ensimmäinen huomiomme on, että τ_n voidaan nähdä n:n riippumattoman samoin jakautuneen satunnaismuuttujan summana, joista jokainen on jakautunut kuten τ_1. Tästä syystä

$$\mathsf{E}[z^{\tau_n} \,|\, S_0 = 0] = \phi(z)^n.$$

Koska $S_1 = \pm 1$ ja molempien tapahtumien todennäköisyys on $1/2$, saamme siirtymällä yhden aika-askeleen eteenpäin yhtälön

$$\phi(z) = \frac{1}{2} z \phi(z)^2 + \frac{1}{2} z.$$

Ratkaisemme tämän toisen asteen yhtälön $\phi(z)$:lle ja valitsemme ratkaisun siten, että ϕ on jatkuva $z = 0$:n ympäristössä ja $\phi(0) = 0$. Tämä ratkaisu on

$$\phi(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - z^2}}{z}.$$

Yksinkertainen lasku osoittaa, että funktion $y \to (1 + y)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, Taylor-sarja origossa on

$$(1 + y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^k$$

missä $\binom{\alpha}{0} = 1$ ja

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{(\alpha - k + 1) \cdot (\alpha - k + 2) \cdot \ldots \cdot \alpha}{k!}.$$

Tästä saamme $\phi(z)$:lle kehitelmän

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^{k-1} z^{2k-1} \\ &= \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k - 1} \binom{2k}{k} 2^{-2k} z^{2k-1}, \end{aligned} \tag{I.31}$$

missä lopputulokseen pääsy vaatii muutaman sievennyksen. Erityisesti käytämme

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-k+2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k}(-1)^{k-1}(2k-3)!! \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}(-1)^{k-1}\frac{(2k)!}{(2k-1)k!}
\end{aligned}
$$

missä $(2k-1)!! = 1\cdot 3\cdot\ldots(2k-1)$.

Kunhan vertaamme kehitelmiä (I.30) ja (I.31), olemme todistaneet seuraavan tuloksen.

Lause I.86. *Olkoon $(S_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ symmetrinen satunnaiskävely $\mathbb{Z}$:lla ja $S_0 = 0$. Satunnaismuuttujan $\tau_1 = \min\{t \geq 0 : S_t = 1\}$ jakauma on*

$$
\mathsf{P}[\tau_1 = 2k-1] = \frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}2^{-2k} \tag{I.32}
$$

missä $k \in \mathbb{N}$.

Lukuja

$$
C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{I.33}
$$

kutsutaan *Catalanin luvuiksi*. Yksi Catalanin luvun C_n kombinatorinen tulkinta on $2n$ askelta pitkien ei-negatiivisten polkujen (nk. Dyck-polkujen)

$$
\mathcal{A}_n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_{2n}) : |x_k - x_{k+1}| = 1,\ x_0 = 0 = x_{2n},\ x_k \geq 0 \text{ kun } k = 1, 2, \ldots 2n-1\}
$$

lukumäärä. Yllä olemme laskeneet $2n$ askelta pitkien positiivisten kävelyjen

$$
\mathcal{B}_n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_{2n}) : |x_k - x_{k+1}| = 1,\ x_0 = 0 = x_{2n},\ x_k \geq 1 \text{ kun } k = 1, 2, \ldots 2n-1\}
$$

lukumäärän. Joukkojen $\mathcal{A}_n$ ja $\mathcal{B}_{n+1}$ välillä on ilmeinen bijektio. Siispä niissä on yhtä monta alkiota. Yllä olevan tuloksen mukaan

$$
|\mathcal{B}_{n+1}| = \frac{1}{2(2n+1)}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n,
$$

mikä todistaa tulkinnan $C_n = |\mathcal{A}_n|$.

Tehtävä I.16. Olkoon $T \in \mathbb{N}$ satunnaismuuttuja, jonka jakauma on $\mathsf{P}[T = 0] = 0$ ja $\mathsf{P}(T = k) = \frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}2^{-2k}$. Osoita, että

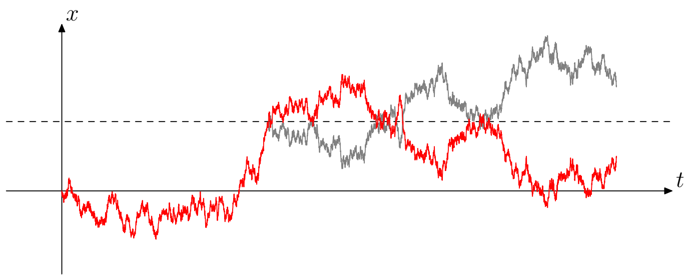
(a) $\mathsf{E}[T^{\alpha}] < \infty$, kun $\alpha < 1/2$,
(b) $\mathsf{E}[T^{\alpha}] = \infty$, kun $\alpha \geq 1/2$.

5.4. Maksimin jakauma

Symmetrisen satunnaiskävelyn $S = (S_t)_{t\in\mathbb{N}}$ maksimiprosessi $M = (M_t)_{t\in\mathbb{N}}$ määritellään kaavalla

$$
M_t = \max_{0\leq s\leq t} S_s.
$$

Maksimin M_t, annutulla ajanhetkellä t, jakauma voidaan laskea eräällä tempulla. Tämä temppu on peilaaminen suoran $x = b$ suhteen tasossa (t, x). Katso myös Kuva I.10.



KUVA I.10. Peilaamme tason b saavuttamisen jälkeen satunnaiskävelyn lopun yhtälön (I.34) osoittamiseksi.

Olkoon $\tau_b = \min\{t \geq 0 : S_t = b\}$. Huomaamme, että $\{\tau_b \leq t\} = \{M_t \geq b\}$. Koska satunnaiskävelyllä on (ns. vahva) Markov-ominaisuus, niin

$$\mathsf{P}[M_t \geq b, S_t = a] = \mathsf{P}[M_t \geq b, b + (b - S_t) = a] = P[S_t = 2b - a], \tag{I.34}$$

kun $b > 0$ ja $a < b$. Ensimmäisessä yhtäsuuruudessa käytimme Markov-ominaisuutta ja siirtymätodennäköysyyksien symmetrisyyttä. Toista yhtäsuuruutta varten huomaamme, että $2b - a > b$ ja siksi $\{M_t \geq b, S_t = 2b - a\} = \{S_t = 2b - a\}$.

Toisaalta, kun $b > 0$ ja $a \geq b$, niin

$$\mathsf{P}[M_t \geq b, S_t = a] = \mathsf{P}[S_t = a].$$

Siispä koska $\{S_t = a\}$, $a \in \mathbb{Z}$, ovat erillisiä tapahtumia, saamme a:n yli summaamalla

$$\mathsf{P}[M_t \geq b] = \mathsf{P}[S_t = b] + 2 \sum_{a=b+1}^{\infty} P[S_t = a],$$

mistä laskemalla kahden tällaisen todennäköisyyden erotuksen saamme

$$\mathsf{P}[M_t = b] = \mathsf{P}[S_t = b] + \mathsf{P}[S_t = b + 1]. \tag{I.35}$$

Tämä tulos on vähintäänkin yllättävä: maksimin jakauma ajanhetkellä t saadaan yksinkertaisella kaavalla satunnaiskävelyn jakaumasta samalla ajanhetkellä.

5.5. Satunnaiskävely graafilla

Olkoon $G = (V, E)$ äärellinen graafi.[13] *Yksinkertainen satunnaiskävely* graafilla G määritellään satunnaiseksi prosessiksi $S = (S_t)_{t \in \mathbb{N}}$ joukolla $V(G)$, joka ajanhetkellä astuu satunnaisesti tämän hetkisen pisteen naapuripisteeseen tasaisen todennäköisyysmitan mukaan. Eli jos $\deg(v)$ on pisteen v aste eli naapurien lukumäärä, niin

$$\mathsf{P}[S_{t+1} = v \mid S_0 = v_0, S_1 = v_1, \ldots, S_t = v_t] = \frac{1}{\deg(v_t)}$$

jos v on v_t:n naapuri. Jos $\mathsf{P}[S_0 = v_0] = 1$ sanomme, että S on lähetetty v_0:sta.

[13] Voisimme tarkastella myös graafia, jonka pistejoukko on ääretön, mutta jokaisella pisteellä on vain äärellinen määrä naapureita. Tällaisia graafeja sanotaan *lokaalisti äärellisiksi*.