

Faasitransitioista

1. Isingin mallin faasitransitio

1.1. Faasitransition määritelmä magnetisaation avulla

Huomautus VI.1. Yllä näimme, että vapaa energia oli epäanalyttinen ja erityisesti sen toinen derivaatta divergoi logaritmisesti, kun $\beta \rightarrow \beta_c$, missä β_c :n määritelmä oli nimenomaan siinä pisteessä esiintyvä epäanalyttisyys.

Olkoon $P_{\beta,+}$ Isingin mallin, +-raunaehdoilla ja ilman ulkoista magneettikenttää $B = 0$, termodynaaminen raja, jonka määrittelemme vaikkapa kasvavan jonon laatikkoja $\Lambda_n = \llbracket -n, n \rrbracket^d$ avulla.

Huomautus VI.2. Lauseen II.75 mukaan Isingin mallin termodynaaminen raja on olemassa ja se on sylinteritapahtumien määräämä Seurauksen II.70 mukaisesti.

Magnetisaation määritelmänä pidämme nyt

$$M_+(\beta) = \mathbf{E}_{\beta,+}[\sigma_0].$$

Määrittelemme *kriittisen käänneislämpötilan* (magnetisaation mielessä) kaavalla

$$\beta_c = \inf\{\beta > 0 : M_+(\beta) > 0\} = \sup\{\beta > 0 : M_+(\beta) = 0\}. \quad (\text{VI.1})$$

Osoitamme alla Lauseessa VI.4 ja sen Seurauksessa VI.5, että tässä määritelmässä on järjeä: $\beta \mapsto M_+(\beta)$ on ei-vähenevä. Sanomme, että Isingin mallilla dimensiassa d on *faasitransitio*, mikäli β_c on sekä äärellinen että positiivinen eli $0 < \beta_c < \infty$, ja *spontaani magnetisaatio*, mikäli β_c on äärellinen eli $0 \leq \beta_c < \infty$.

Huomautus VI.3. Kuten edellä näimme Osan II Luvussa 2.2 Isingin mallilla ei ole faasitransitiota eikä spontaania magnetisaatiota, kun $d = 1$.

1.1.1. Korrelaatioepäyhtälöitä

Tarkastellaan Isingin mallia äärellisellä graafilla $G = (V, E)$ ja jollain reunaehdoilla, jotka joko vapaat tai +-reunaehdot tai niiden yhdistelmiä, jolloin kiinnitämme myös ympäröivän graafin $G \subset G'$, jossa reunaehdot ovat määritellyt. Määritellään kaikilla pistejoukoilla $A \subset V$ joukkoa vastaava spinmuuttujien tulo

$$\sigma_A = \prod_{x \in V} \sigma_x.$$

Lause VI.4. *Olkoon $0 < \beta' \leq \beta$, $h \geq 0$ ja $h' \in [-h, h]$ ja reunaehtona $+ -$ tai vapaa reunaehto $\underline{\xi} \in \{0, 1\}^{V(G')}$. Silloin*

$$\mathbb{E}_{\beta, h, \underline{\xi}}[\sigma_A] \geq 0 \quad (\text{VI.2})$$

$$\mathbb{E}_{\beta, h, \underline{\xi}}[\sigma_A] \geq \mathbb{E}_{\beta', h', \underline{\xi}}[\sigma_A]. \quad (\text{VI.3})$$

Todistus. Todistetaan väite (VI.2) hieman yleisemmässä tilanteessa, koska tarvitsemme tätä epäyhtälön (VI.3) todistamisessa. Tarkastellaan todennäköisyysmittaa

$$P[\sigma] = \frac{1}{Z} \prod_{B \subset V} \exp(K_B \sigma_B),$$

missä kytkentävoimakkuudet K_B ovat ei-negatiivisia ja partitiofunktio on kuten aina

$$Z = \sum_{\sigma} \prod_{B \subset V} \exp(K_B \sigma_B).$$

Huomaamme, että Isingin malli kaikilla sallimillamme reunaehdoilla on aina tätä muotoa.

Koska $Z > 0$, riittää osoittaa, että

$$Z \mathbb{E}[\sigma_A] = \sum_{\sigma} \sigma_A \prod_{B \subset V} \exp(K_B \sigma_B) \geq 0.$$

Kirjoitetaan jokainen tulon eksponenttifunktio sarjana, jolloin summaamalla muuttujien $n_B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ yli

$$\sum_{\sigma} \sigma_A \prod_{B \subset V} \exp(K_B \sigma_B) = \sum_{(n_B)_{B \subset V}} \left[\prod_{B \subset V} \frac{K_B^{n_B}}{n_B!} \right] \sum_{\sigma} \sigma_A \underbrace{\left[\prod_{B \subset V} \sigma_B^{n_B} \right]}_{(*)}. \quad (\text{VI.4})$$

Termi (*) on muotoa $\prod_{x \in V} \sigma_x^{m_x}$ ja niinpä käyttämällä huomiota

$$\sum_{m_x \in \{-1, +1\}} \sigma_x^{m_x} = \begin{cases} 2 & \text{kun } m_x \text{ on parillinen} \\ 0 & \text{kun } m_x \text{ on pariton} \end{cases}, \quad (\text{VI.5})$$

toteamme, että summa σ :n yli edellisessä lausekkeessa on ei-negatiivinen. Siispä olemme osoittaneet, että

$$\mathbb{E}[\sigma_A] \geq 0$$

yleistetyssä tapauksessa. Epäyhtälö (VI.2) seuraa tästä erikoistapauksena.

Todistamme myös epäyhtälö (VI.3) yleistettynä. Väitämme, että

$$\frac{1}{Z} \sum_{\sigma} \sigma_A \prod_{B \subset V} \exp(K_B \sigma_B) \geq \frac{1}{Z'} \sum_{\sigma} \sigma_A \prod_{B \subset V} \exp(K'_B \sigma_B),$$

kun $K_B \geq 0$ ja $|K'_B| \leq K_B$ kaikilla B . Tässä Z, Z' ovat partitiofunktioita.

Kirjoittamalla kaksi riippumatonta kopiota systeemistä saamme

$$\begin{aligned} & Z Z' \left[\frac{1}{Z} \sum_{\sigma} \sigma_A \prod_{B \subset V} \exp(K_B \sigma_B) - \frac{1}{Z'} \sum_{\sigma'} \sigma'_A \prod_{B \subset V} \exp(K'_B \sigma'_B) \right] \\ &= \sum_{\sigma, \sigma'} (\sigma_A - \sigma'_A) \prod_{B \subset V} \exp(K_B \sigma_B + K'_B \sigma'_B) \\ &= \sum_{\sigma''} (1 - \sigma''_A) \sum_{\sigma} \sigma_A \prod_{B \subset V} \exp(\underbrace{(K_B + K'_B \sigma''_B)}_{(**)} \sigma_B), \end{aligned}$$

missä teimme muuttujanvaihdon asettamalla $\sigma''_x = \sigma_x \sigma'_x$. Oletuksen perusteella (**) on aina ei-negatiivinen ja niinpä ensimmäisen todistamamme epäyhtälön perusteella sisempi summa on ei-negatiivinen. Koska myös $(1 - \sigma''_A) \geq 0$, väite yleisemmästä epäyhtälöstä seuraa. Epäyhtälö (VI.3) seuraa erikoistapauksena. \square

Seuraus VI.5. *Magnetisaatio $\beta \mapsto M_+(\beta)$ on ei-negatiivinen ja ei-vähenevä ja siksi $\inf\{\beta > 0 : M_+(\beta) > 0\} = \sup\{\beta > 0 : M_+(\beta) = 0\}$.*

Samalla menetelmällä kuin Lause VI.4 todistettiin voimme todistaa seuraavan lauseen.

Lause VI.6. *Kun käänteislämpötila β on vakio, magnetisaatio $M_+(\beta)$ on dimension d funktiona kasvava.*

Todistus. Jätämme todistuksen yksityiskohdat lukijalle, mutta toteamme, että d -dimensioinen laatikko $\Lambda_{n+1}^{(d)}$ voidaan upottaa $d + 1$ -dimensioiseen laatikkoon $\Lambda_{n+1}^{(d+1)}$ origon kautta kulkevalle d -dimensioiselle hypertasolle $\{(x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_{d+1} = 0\}$. Voimme järjestää lauseen Lauseen VI.4 todistuksessa esiintyneet vakiot $K'_B = K_B^{(d)}$ ja $K_B = K_B^{(d+1)}$, $B \subset E(\Lambda_{n+1})$, vastaten d - ja $d + 1$ -dimensioisia Isingin malleja siten, että $0 \leq K_B^{(d)} \leq K_B^{(d+1)}$. Väite seuraa Lauseen VI.4 todistuksessa käytetystä argumentista. \square

1.2. Faasitransition olemassaolo, kun $d \geq 2$

1.2.1. Matala lämpötila $\beta > \beta_1$

Väitämme, että on olemassa $\beta_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ ja $\delta \in (0, 1/2)$ siten, että

$$\mathbb{P}_{\Lambda_n}[\sigma_0 = -1] \leq \delta$$

kaikilla n ja kaikilla $\beta > \beta_1$. Tällöin magnetisaatio on alhaalta rajoitettu

$$E_{\Lambda_n}[\sigma_0] = 1 - 2\mathbb{P}_{\Lambda_n}[\sigma_0 = -1] \geq 1 - 2\delta > 0$$

kaikissa äärellisissä laatikoissa Λ_n , ja niin ollen

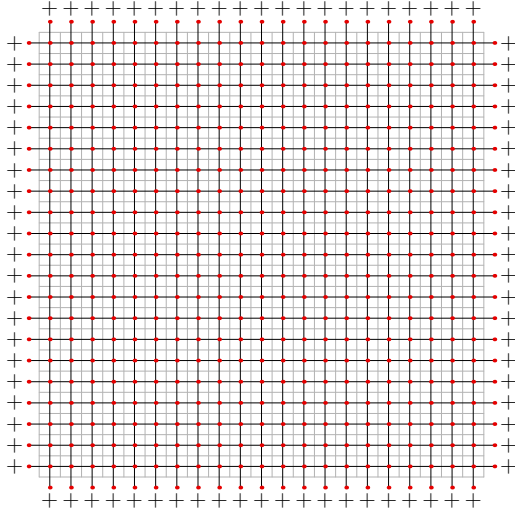
$$M_+(\beta) \geq 1 - 2\delta > 0$$

riittävän pienissä lämpötiloissa, eli kun $\beta > \beta_1$.

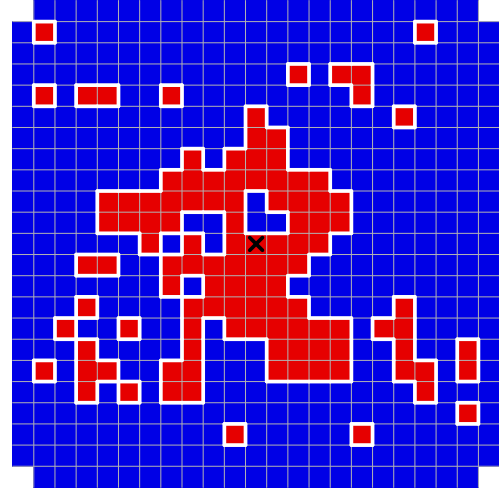
Lause VI.7. *Kun $d = 2, 3, 4, \dots$, on olemassa $\beta_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ siten, että $M_+(\beta) > 0$, kun $\beta > \beta_1$. Eli toisin sanoen Isingin mallilla on spontaani magnetisaatio.*

Todistus. Oletamme, että $d = 2$, vaikka argumentti toimii samalla tavalla myös, kun $d > 2$. Korkeammassa dimensioissa rajapinnat ovat $d - 1 > 1$ dimensioisia, jolloin rajapinnoista puhuminen on hankalampaa. Kun $d = 2$, ne ovat näppärästi polkuja. Itse asiassa väitteen todistaminen, kun $d = 2$, on riittävää, sillä yleinen väite seuraa silloin Lauseesta VI.6.

Neliöhilan \mathbb{Z}^2 duaalihila muodostuu \mathbb{Z}^2 :n neliöiden keskipisteiden muodostamasta pistejoukosta ja naapurineliöiden (jotka jakavat yhden \mathbb{Z}^2 :n viivan) yhdistävistä viivoista. Duaalihila on siis siirretty neliöhila $\mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2)$. Koska tarkastelemme Isingin mallia $+$ -reunaehdoilla Λ_n :ssä, suorakaiteen muotoisen aligraafin Λ_n duaaligraafi Λ_n^* muodostuu niistä duaalihilan $\mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2)$ pisteistä, jotka ovat Λ_{n+1} :n ”sisällä”, ja kaikista niitä yhdistävistä viivoista, kts. Kuva VI.1(a). Sanomme *rajapintakonfiguraatioksi* mitä tahansa viivakokoelmaa $S \subset E(\Lambda_n^*)$, jolla jokaisen pisteen aste on parillinen. Huomaamme, että rajapintakonfiguraatiot ovat yksi yhteen vastaavuudessa spinkonfiguraatioihin: rajapintakonfiguraation viiva erottaa eriarvoiset spinin (näin siirrymme spineistä rajapintoihin) ja toisaalta spinarvot selviävät seuraamalla reunalta, jossa spinin ovat $+$, mitä tahansa \mathbb{Z}^2 -polkua haluttuun sisäpisteeseen ja laskemalla kohdattujen viivojen lukumäärän parillisuus siten, että parillinen lukumäärä vastaa $+$ -spiniä ja pariton $-$ -spiniä (näin siirrymme rajapintoista spineihin).



(a) Graafi, jolla Isingin malli on määritelty $+$ -reunaehdoin, ja sitä vastaava duaaligraafi.



(b) Spinkonfiguraatioiden ja rajapintakonfiguraatioiden välillä on vastaavuus yksi-yhteen.

KUVA VI.1. Ns. matalan lämpötilan ekspansiossa partitiofunktio ja jokaisen spinkonfiguraation Boltzmannin paino kirjoitetaan toisistaan arvoltaan poikkeavien naapurispinparien lukumäärän avulla. Tämä on näppärää kirjoittaa rajapintakonfiguraatioiden avulla, jotka ovat kuvaan piirretyn valkoisen graafin kaltaisia duaaligraafin aligraafeja, joiden jokaisen pisteen aste on parillinen. Spinin arvo vaikkapa keskipisteessä (rasti) saadaan laskemalla sen ympäröivien silmukoiden määrän parillisuus.

Huomaamme, että mikäli S on $\underline{\sigma}$:aa vastaava rajapintakonfiguraatio niin,

$$P[\underline{\sigma}] = \frac{1}{\tilde{Z}} \exp(-2\beta \#S),$$

koska jokainen S :n viiva nostaa tilan energiaa 2β :n verran suhteessa ”perustilaan”, $\sigma_x \equiv +1$ eli $S = \emptyset$. Tässä partitiofunktio on nyt

$$\tilde{Z} = \sum_{S \in \mathcal{C}} \exp(-2\beta \#S),$$

missä \mathcal{C} on kaikkien rajapintakonfiguraatioiden kokoelma.

Olkoon \mathcal{C}_1 kokoelman \mathcal{C} osakokoelma, jonka konfiguraatioissa \mathcal{Q} :aa ympäröi pariton määrä polkuja. Olkoon S' sisin yksinkertainen polku, joka ympäröi \mathcal{Q} :n konfiguraatioissa $S \in \mathcal{C}_1$, ja \mathcal{P} kaikkien \mathcal{Q} :aa ympäröivien yksinkertaisten polkujen joukko, ja $\#P$ polun $P \in \mathcal{P}$ pituus. Tällöin spin- ja rajapintakonfiguraatioiden vastaavuudesta seuraa, että

$$\begin{aligned} P_{\Lambda_n}[\sigma_0 = -1] &= \frac{\sum_{S \in \mathcal{C}_1} e^{-2\beta \#S}}{\sum_{S \in \mathcal{C}} e^{-2\beta \#S}} = \frac{\sum_{P \in \mathcal{P}} e^{-2\beta \#P} \sum_{S \in \mathcal{C}_1 : S' = P} e^{-2\beta (\#S - \#P)}}{\sum_{S \in \mathcal{C}} e^{-2\beta \#S}} \\ &= \sum_{P \in \mathcal{P}} e^{-2\beta \#P} \underbrace{\frac{\sum_{S \in \mathcal{C}_1 : S' = P} e^{-2\beta \#(S \setminus P)}}{\sum_{S \in \mathcal{C}} e^{-2\beta \#S}}}_{\leq 1} \\ &\leq \sum_{P \in \mathcal{P}} e^{-2\beta \#P} \leq \sum_{l=4}^{\infty} \frac{l-2}{2} 3^{l-1} e^{-2\beta l} \leq \sum_{l=4}^{\infty} (4e^{-2\beta})^l. \end{aligned}$$

Oikeasta puolesta saamme pienemmän kuin mikä tahansa $\delta > 0$, kun $\beta > \beta_1$ sopivan suurella β_1 . Tässä käytimme sitä, että $S \setminus P$ on myös rajapintakonfiguraatio ja että kiinteällä P jokainen osoittajan summan $S \setminus P$ esiintyy nimittäjän summassa. Polkujen \mathcal{P} :ssä, joiden pituus on l -askelta, lukumäärää voidaan arvioida niin, että sen tulee leikata negatiivinen

reaaliakseli, jossain pisteistä $1/2 - k$, missä $k = 1, 2, \dots, (l-2)/2$, ja loput $l-1$ viivoista voimme valita enintään 3^{l-1} :llä tavalla. Erittäin tärkeä huomio on myös, että lyhyen mahdollinen polku on 4:n askeleen mittainen. Väite seuraa tämän aliluvun alun päättelystä. \square

1.2.2. Korkea lämpötila $\beta < \beta_0$

Lause VI.8. *Kun $d = 1, 2, 3, 4, \dots$, on olemassa $\beta_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ siten, että $M_+(\beta) = 0$, kun $\beta < \beta_0$. Lisäksi termodynaaminen Isingin mallin termodynaaminen raja on tällöin riippumaton reunaehdoista.*

Huomautus VI.9. Kun $d = 1$, voisimme valita $\beta_0 = \infty$.

Todistus. Tarkastellaan kahta annettua reunaehto $\underline{\xi}$ ja $\underline{\zeta}$ ja äärellistä laatikkoa Λ_n . Osoitamme voimme valita $\beta_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ siten, että millä tahansa kiinnitetyllä pistejoukolla $A \subset \mathbb{Z}^d$ pätee

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{E}_{\Lambda_n, \beta, B=0, \underline{\xi}}(\sigma_A) - \mathbb{E}_{\Lambda_n, \beta, B=0, \underline{\zeta}}(\sigma_A) \right) = 0,$$

kun $0 < \beta < \beta_0$. Väite magnetisaatiosta seuraa tästä, koska voimme valita reunaehdoiksi $+$ - ja $-$ -reunaehdot, joilla $\mathbb{E}_{\Lambda_n, \beta, B=0, +1}[\sigma_0] = -\mathbb{E}_{\Lambda_n, \beta, B=0, -1}[\sigma_0]$, ja siksi $M_+(\beta) = -M_+(\beta)$, kun $0 < \beta < \beta_0$.

Kirjoitetaan, kuten Lauseen VI.4 todistuksessa, kaksi riippumatonta kopiota systeemistä, eli

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\Lambda_n, \beta, B=0, \underline{\xi}}(\sigma_A) - \mathbb{E}_{\Lambda_n, \beta, B=0, \underline{\zeta}}(\sigma_A) \\ &= \frac{\sum_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} (\sigma_A - \sigma'_A) \exp(-\beta H_{\Lambda_n, B=0, \underline{\xi}}(\underline{\sigma}) - \beta H_{\Lambda_n, B=0, \underline{\zeta}}(\underline{\sigma}'))}{\sum_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} \exp(-\beta H_{\Lambda_n, B=0, \underline{\xi}}(\underline{\sigma}) - \beta H_{\Lambda_n, B=0, \underline{\zeta}}(\underline{\sigma}'))}. \end{aligned}$$

Huomaamme, että

$$\exp(-\beta H_{\Lambda_n, B=0, \underline{\xi}}(\underline{\sigma}) - \beta H_{\Lambda_n, B=0, \underline{\zeta}}(\underline{\sigma}')) = \prod_{\{v, w\} \in E(\Lambda_{n+1})} e^{\beta(\sigma_v \sigma_w + \sigma'_v \sigma'_w)} \quad (\text{VI.6})$$

missä reunaehdot näkyvät niin, että $\sigma_v = \xi_v$ ja $\sigma'_v = \zeta_v$, kun $v \in V(\Lambda_{n+1}) \setminus V(\Lambda_n)$.

Määrittelemme painofunktion

$$f_{v, w} = e^{\beta(\sigma_v \sigma_w + \sigma'_v \sigma'_w + 2)} - 1,$$

joka toteuttaa $f_{v, w} > 0$ ja

$$e^{\beta(\sigma_v \sigma_w + \sigma'_v \sigma'_w)} = e^{-2\beta}(1 + f_{v, w}).$$

Lisäksi, kun β on pieni, on tämä paino aina pieni: kvantifioimme tämän epäyhtälöllä

$$0 < f_{v, w} \leq 4\beta(1 + f_{v, w}), \quad (\text{VI.7})$$

jonka oikea puoli seuraa epäyhtälöstä $e^x - 1 \leq xe^x$, kun $x \geq 0$. Painofunktion avulla kirjoitamme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\Lambda_n, \beta, B=0, \underline{\xi}}(\sigma_A) - \mathbb{E}_{\Lambda_n, \beta, B=0, \underline{\zeta}}(\sigma_A) &= \frac{\sum_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} (\sigma_A - \sigma'_A) \prod_{\{v, w\} \in E(\Lambda_{n+1})} (1 + f_{v, w})}{\sum_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} \prod_{\{v, w\} \in E(\Lambda_{n+1})} (1 + f_{v, w})} \\ &= \frac{\sum_{B \subset E(\Lambda_{n+1})} \sum_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} (\sigma_A - \sigma'_A) \prod_{\{v, w\} \in B} f_{v, w}}{\sum_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} \prod_{\{v, w\} \in E(\Lambda_{n+1})} (1 + f_{v, w})}. \end{aligned} \quad (\text{VI.8})$$

Yhtälön (VI.8) oikean puolen osoittajan *summa spinkonfiguraatioiden yli tuottaa nollan*, mikäli B ei yhdistä polulla mitään A :n pistettä laatikon reunaan, koska mikäli tällaista polkua ei ole, voimme erottaa tulosta A :n komponentin B :ssä ja suorittaa ensin summaus tämän komponentin spinien yli, jolloin vallitsee täydellinen symmetria pilkullisten ja pilkuttomien spinien välillä.

Niinpä summaamme vain niiden B yli jotka yhdistävät polulla, jonkun A pisteen reunaan, merkitään tätä ehtoa $A \xleftrightarrow{B} \partial_n$:llä (missä käytämme lyhennysmerkintää $\partial_n = V(\Lambda_{n+1}) \setminus$

$V(\Lambda_n)$), merkitään B' :llä jotain konsistenttia tapaa yksinkertainen polku B :ssä A :sta reunalle. Merkitään lisäksi A :ta ja reunaa yhdistävien yksinkertaisten polkujen joukkoa \mathcal{P} :llä. Tällöin

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{B \subset E(\Lambda_{n+1})} \sum_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} (\sigma_A - \sigma'_A) \prod_{\{v,w\} \in B} f_{v,w} \right| = \left| \sum_{B: A \xrightarrow{B} \partial_n} \sum_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} (\sigma_A - \sigma'_A) \prod_{\{v,w\} \in B} f_{v,w} \right| \\ & \leq 2 \sum_{B: A \xrightarrow{B} \partial_n} \sum_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} \prod_{\{v,w\} \in B} f_{v,w} \\ & = 2 \sum_{B: A \xrightarrow{B} \partial_n} \sum_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} (4\beta)^{\#B'} \left(\prod_{\{v,w\} \in B'} (1 + f_{v,w}) \right) \left(\prod_{\{v,w\} \in B \setminus B'} f_{v,w} \right) \\ & = 2 \sum_{P \in \mathcal{P}} (4\beta)^{\#P} \sum_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} \left(\prod_{\{v,w\} \in P} (1 + f_{v,w}) \right) \left(\sum_{B: B'=P} \prod_{\{v,w\} \in B \setminus P} f_{v,w} \right). \end{aligned}$$

Huomaamme, että oikean puolen sisimmän summan kaikki termit esiintyvät summassa, joka voidaan kirjoittaa yksinkertaisesta muodosta, nimittäin

$$\sum_{B: B'=P} \prod_{\{v,w\} \in B \setminus P} f_{v,w} \leq \sum_{\tilde{B} \subset E(\Lambda_{n+1}) \setminus P} \prod_{\{v,w\} \in \tilde{B}} f_{v,w} = \prod_{\{v,w\} \in E(\Lambda_{n+1}) \setminus P} (1 + f_{v,w}).$$

Sijoittamalla tämä osoittajan arvio lausekkeen (VI.8) itseisarvoon saamme

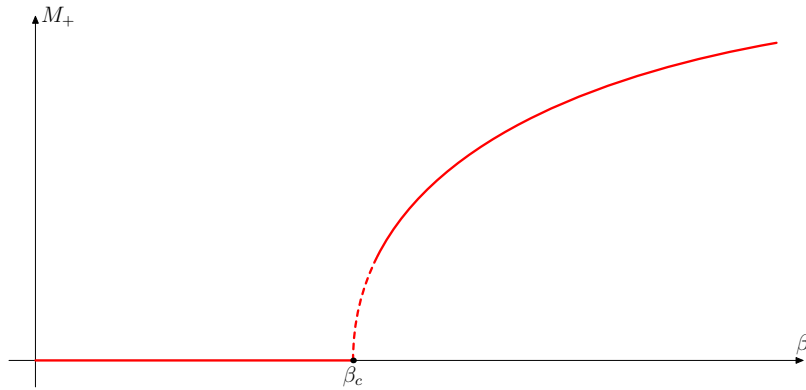
$$\left| \mathbb{E}_{\Lambda_n, \beta, B=0, \underline{\xi}}(\sigma_A) - \mathbb{E}_{\Lambda_n, \beta, B=0, \underline{\zeta}}(\sigma_A) \right| \leq 2 \sum_{P \in \mathcal{P}} (4\beta)^{\#P}$$

Valitaan jokin m siten, että $A \subset \Lambda_m$. Tällöin kaikilla $n > m$

$$\left| \mathbb{E}_{\Lambda_n, \beta, B=0, \underline{\xi}}(\sigma_A) - \mathbb{E}_{\Lambda_n, \beta, B=0, \underline{\zeta}}(\sigma_A) \right| \leq 2(\#A) \sum_{l=n-m}^{\infty} 2d(2d-1)^l (4\beta)^l.$$

Oikea puoli lähestyy nollaa, kun $n \rightarrow \infty$, kunhan $4(2d-1)\beta < 1$. \square

1.2.3. Kriittisen lämpötilan läheisyydessä

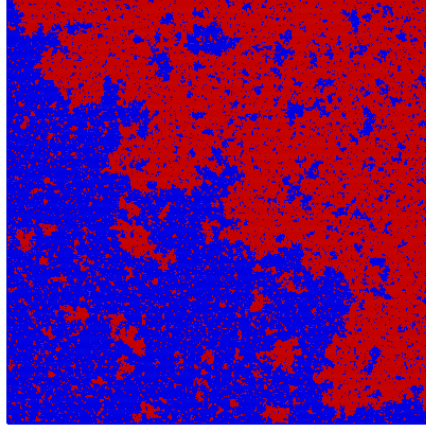


KUVA VI.2. Isingin mallin magnetisaatio, kun $d = 2, 3, 4, \dots$, on kuvassa esitetyn kaltainen.

Tähän mennessä olemme osoittaneet Kuvan VI.2 mukaisen käytöksen magnetisaatiolle: magnetisaatio on β :n kasvava funktio, korkeassa lämpötilassa magnetisaatio katoaa ja matalassa lämpötilassa magnetisaatio on positiivinen. Mikäli uskomme, että mallilla on kaikissa dimensioissa, kuten kun $d = 2$, yksikäsitteinen kriittinen piste termodynaamisten suureiden analytytisytydessä, on magnetisaatio sileä kriittisen pisteen ulkopuolella. Ainoa avoin kysymys on magnetisaation jatkuvuus ja

tarkempi käytös kriittisessä pisteessä, eli käytös Kuvan VI.2 katkoviivalla, kun β lähestyy β_c :tä ylhäältä.

Kriittisen pisteen lähellä mallin tarkastelu on melko ilmiselvästi hankalampaa kuin tämän luvun menetelmien käyttö. Aiemmin esittelemiimme menetelmiin liittyen mainitsemme tätä kriittistä käytöstä koskevan Chen-Ning Yangin tuloksen, joka käyttää Onsagerin ratkaisua, ja jonka mukaan magnetisaatio toteuttaa $M_+(\beta) = c\beta_+^{1/8} + o(1)$, kun $\beta_+ \rightarrow 0$, missä $\beta_+ = \max\{0, \beta - \beta_c\}$.



KUVA VI.3. Isingin mallin spinconfiguraatio kriittisessä pisteessä puoliksi $+$ - ja puoliksi $-$ -reunaehdoin. Eräs nykyisin mielenkiinnon kohteena oleva tutkimuskysymys on rajapintojen satunnainen geometria erityisesti kriittisessä pisteessä. Tämän kuvan rajapinnat ovat sopivassa mielessä fraktaaleja ja eräs tällainen tutkimuskysymys on fraktaalidimension, joka on magnetisaation eksponentin $1/8$ tapainen kriittinen eksponentti, arvon määrittäminen ja hilan valinnasta riippumattomuuden todistaminen matemaattisesti.

1.2.4. Matalan ja korkean lämpötilan kehitemät

Tarkastellaan tässä aliluvussa edelleen Isingin mallia ilman ulkoista magneettikenttää dimensiossa $d = 2$.

Matalan lämpötilan kehitemä. Tapaa laskea partitiofunktio tai jokin vastaava σ_A :n odotusarvon osoittajassa esiintyvä summa rajapintakonfiguraatioiden avulla kutsutaan *matalan lämpötilan kehitemäksi*. Terminologia johtaa juurensa tietysti siihen, että tämä on hyödyllinen erityisesti matalissa lämpötiloissa, jolloin rajapintojen viivoja on vähän. Tässä lähestymistavassa partitiofunktio kirjoitetaan siis muodossa

$$Z = e^{\beta \#E} \sum_{S \in \mathcal{C}} e^{-2\beta \#S}.$$

Korkean lämpötilan kehitelmä. Kun asetamme $\sigma_e = \sigma_v \sigma_w$ kaikilla $e = \{v, w\} \in E$ ja kirjoitamme partitiofunktion muodossa

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\sigma} \prod_{e \in E} (\cosh(\beta) + \sigma_e \sinh(\beta)) \\ &= \cosh(\beta)^{\#E} \sum_{B \subset E} \sum_{\sigma} (\tanh(\beta))^{\#B} \prod_{e \in B} \sigma_e \\ &= 2^{\#V} \cosh(\beta)^{\#E} \sum_{B \in \mathcal{C}'} (\tanh(\beta))^{\#B}, \end{aligned}$$

missä \mathcal{C}' on kaikkien parillista astetta olevien aligraafien kokoelma, puhumme valitussa terminologiassa *korkean lämpötilan kehitelmästä*. Tässä käytimme jälleen huomiota (VI.5).

Kramers–Wannier-dualiteetti. Koska neliöhilan duaalihila on neliöhila, mikäli tarkastelemme kaksiulotteista Isingin mallia neliöhilalla, ovat molemmat kehitelmät summia parillista astetta olevien neliöhilan aligraafien yli, tosin hieman erisuuruissa laatikoissa. Vertaamalla yllä olevia painoja, kun matalan lämpötilan kehitelmässä käänteislämpötila on β^* ja korkean lämpötilan kehitelmässä käänteislämpötila on β huomaamme, että kehitelmien painot ovat samat, kun

$$e^{-2\beta^*} = \tanh(\beta),$$

joka on Onsagerin ratkaisusta tuttu duaalilämpötilan yhtälö. Kriittinen lämpötila β_c on ns. *itseduaali piste* $\beta_c^* = \beta_c$.