2.3. Siirtomatriisin ominaisvektorit ja -arvot ja vapaa energia

Periaatteessa kaikki mahdolliset kaksiulotteisen Isingin mallin observaabelit voitaisiin laskea esityksestä (IV.36) ja kannan vaihdosta kantojen $\{\underline{e}_{\sigma}\}$ ja $\{\underline{g}_{n}\}$ välillä. Käytännössä tämä voi olla hankalaa. Selvitämme nyt kuikenkin $\mathbf{T}$:n ominaisvektorit ja ominaisarvot tarkoituksenamme selvittää niistä suurin (kaikki ominaisarvot ovat positiivisia) ja osoittaa, että muut ovat riittävän pieniä, jotta voimme lausua vapaan energiatiheyden suurimman ominaisarvon rajana.

2.3.1. $\mathbf{T}_0$*:n ja* $\mathbf{T}_1$*:n ominaisarvot*

Muistutetaan vielä, että $\mathbf{T}_0$:lle ominaisvektorin fermionitilassa tulee olla $\mathbf{C}$-fermioneita, eli niin ollen myös $\boldsymbol{\gamma}$- tai $\boldsymbol{\xi}$-fermioneita, parillinen määrä, ja että $\mathbf{T}_1$:lle fermioneita tulee olla pariton määrä, jotta nämä olisivat ominaisvektoreita myös $\mathbf{T}$:lle.

Huomataan, että kaavassa (IV.32) esiintyvä $\cos(\pi l/M)$ on aidosti pienempi kuin 1 ja aidosti vähenevä l:ssä. Niinpä

$$\cosh \varepsilon_l \geq \cosh \varepsilon_1 > \cosh(2K_1^*)\cosh(2K_2) - \sinh(2K_1^*)\sinh(2K_2) = \cosh(\varepsilon_*)$$

missä $\varepsilon_* = 2|K_1^* - K_2|$. Eli pätee siis, kun $K_1^* \neq K_2$,

$$\varepsilon_l > \varepsilon_* > 0$$

kaikilla $l \in [\![1, M-1]\!]$. Huomataan myös, että

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} -\varepsilon_* & \text{kun } K_1^* < K_2 \\ \varepsilon_* & \text{kun } K_1^* > K_2 \end{cases}$$

Huomautus IV.34. Tarkastellaan isotrooppista Isingin mallia $K_1 = K_2 = \beta$ ja $\beta = 1/t$, missä t on lämpötila, jolle käytämme hieman poikkeuksellista symbolia, jottei se sekoittuisi siirtomatriisiin $\mathbf{T}$. Jos kriittinen läpötila t_c määritellään yhtälön

$$e^{-\frac{2}{t}} = \tanh\left(\frac{1}{t}\right)$$

ratkaisuna, kts. Tehtävä IV.7, eli

$$t_c = \frac{2}{\log(\sqrt{2}+1)},$$

Tällöin, jos $t < t_c$ eli $K_1 > 1/t_c$, niin $K_1^* < 1/t_c$ Tehtävän IV.7 mukaan. Siis $K_1^* < K_2$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $t < t_c$.

Siirtomatriisin $\mathbf{T}_0$ *suurin ominaisarvo:* Suurinta ominaisarvoa vastaava ominaisvektori on $\boldsymbol{\xi}$-vakuumivektori $\underline{g}_{0,0,\ldots,0}$. Tällöin suurin ominaisarvo on

$$\Lambda_0 = (2\sinh(2K_1))^{\frac{M}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{l=\pm1,\pm3,\ldots,\pm(M-1)} \varepsilon_l\right)$$

Huomataan myös, että muut omaisarvot Λ toteuttavat

$$\Lambda \leq \Lambda_0 \exp\left(-\varepsilon_* \sum_{l=\pm1,\pm3,\ldots,\pm(M-1)} n_l\right) \tag{IV.38}$$

missä n_l ovat fermionitilojen miehitysluvut.

Siirtomatriisin $\mathbf{T}_1$ *suurin ominaisarvo:* Suurinta ominaisarvoa vastaava ominaisvektori on $\boldsymbol{\xi}$-vakuumivektori $\underline{g}_{0,0,\ldots,0}$, kun $K_1^* > K_2$ (eli kun $t > t_c$), tai $\boldsymbol{\xi}_0^\dagger \underline{g}_{0,0,\ldots,0}$, kun $K_1^* < K_2$ (eli kun $t < t_c$). Molemmissa tapauksissa ominaisarvo on

$$\Lambda_1 = (2\sinh(2K_1))^{\frac{M}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon_* + \frac{1}{2}\sum_{l=\pm 2,\pm 4,\ldots,\pm M} \varepsilon_l\right).$$

Muut ominaisarvot toteuttavat tässäkin tapauksessa yllä olevaa vastaavan arvion

$$\Lambda \leq \Lambda_0 \exp\left(-\varepsilon_*\left((1-\delta_{n_0,n_0^*}) + \sum_{l=\pm 2,\pm 4,\ldots,\pm(M-2),M} n_l\right)\right),$$

missä $n_0^* = 0$, kun $K_1^* > K_2$, ja $n_0^* = 1$, kun $K_1^* < K_2$.

2.3.2. *Kaksiulotteisen Isingin mallin vapaa energia*

Määrillään

$$E(x) = \cosh^{-1}\left[\cosh(2K_1^*)\cosh(2K_2) - \sinh(2K_1^*)\sinh(2K_2)\cos x\right]$$

missä valitsemme $\cosh^{-1}$:n positiivisen haaran.

Näimme edellä, että suurin ominaisarvo oli joko Λ_0 tai Λ_1. Siksi aina, kun $K_1^* \neq K_2$, T:n suurinominaisarvo on suurinpiirtein

$$\Lambda_* = (2\sinh(2K_1))^{\frac{M}{2}} \exp\left(\frac{M}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E(x)\mathrm{d}x\right).$$

Kun $K_1^* > K_2$, T_1:n suurinta ominaisarvoa vastaava ominaisvektori ei ole sallittu pariteettivaatimuksen takia. Kun $K_1^* < K_2$ ($t < t_c$), suurin ja toiseksi suurin ominaisarvo ovat lähes samat. Sanomme, että perustila on kaksinkertaisesti degeneroitunut termodynamisella rajalla. Tämä degeneraatio ei kuitenkaan näy vapaassa energiassa kuten alla näemme.

Olkoon $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_{2^M} > 0$ siirtomatriisin $\mathbf{T}$ ominaisarvot suurusjärjestyksessä. Lähtien vapaan energitiheyden määritelmästä

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{\beta}\lim_{N,M\to\infty}\frac{1}{N\,M}\log Z_{M,N}(\beta) \\ &= -\frac{1}{\beta}\lim_{N,M\to\infty}\frac{1}{N\,M}\log \mathrm{Tr}(T^N) \\ &= -\frac{1}{\beta}\lim_{N,M\to\infty}\frac{1}{N\,M}\log(\lambda_1^N + \lambda_2^N + \ldots \lambda_{2^M}^N) \end{aligned}$$

Kirjoitamme seuraavaksi

$$\lambda_1^N + \lambda_2^N + \ldots \lambda_{2^M}^N = \Lambda_*^N \left(\frac{\lambda_1}{\Lambda_*}\right)^N \left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^N + \ldots \left(\frac{\lambda_{2^M}}{\lambda_1}\right)^N\right).$$

Todistamme seuraavan aputuloksen alempana.

Lemma IV.35. *Jos* $M, N \to \infty$ *siten, että* $(\log M)/N \to 0$*, niin*

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \log \frac{\lambda_1}{\Lambda_*} = 0 \tag{IV.39}$$

$$\lim_{N,M\to\infty} \frac{1}{N\,M} \log\left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^N + \dots \left(\frac{\lambda_{2^M}}{\lambda_1}\right)^N\right) = 0 \tag{IV.40}$$

Tällöin apulauseen oletuksin

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{\beta} \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \log \Lambda_* \\ &= -\frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{2}\log(2\sinh(2K_1)) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E(x)\mathrm{d}x\right] \\ &= -\frac{1}{\beta}\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[E(x) - \log(2\sinh(2K_1))\right]\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{IV.41}$$

joka on ensimmäinen täysin eksplisiittinen muoto vapaalle energialle, jonka olemme kirjoittaneet.

2.3.3. *Ominaisarvojen tiheys ja suurimman ominaisarvon merkitsevyys*

Perustelemme nyt tarkemmin Lemmaa IV.35 viime aliluvusta. Huomaamme ensin, että $x \mapsto E(x)$ kasvava välillä $[0, \pi]$. Kun $x = 0$, lauseke $\cosh^{-1}$:n sisällä on hyperbolisten trigonometristen funktioiden summakaavan mukaan $\cosh(2(K_1^* - K_2))$. Tämä on aidosti suurempi kuin 1, kun $K_1^* \neq K_2$. Koska $x \mapsto \cosh^{-1} x$ on sileä, kun $x > 1$, päättelemme, että $x \mapsto E(x)$ on Lipschitz-jatkuva välillä $[-\pi, \pi]$, kun $K_1^* \neq K_2$, eli on olemassa $C > 0$ siten, että kaikilla $x, y \in [0, \pi]$

$$|E(x) - E(y)| \leq C|x - y|.$$

Koska $\varepsilon_l = E(l\pi/M)$,

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2}\sum_{l=\pm1,\pm3,\dots,\pm(M-1)} \varepsilon_l - \frac{M}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E(x)\mathrm{d}x\right| \\ =&\frac{M}{4\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(E(x) - \sum_{l=\pm1,\pm3,\dots,\pm(M-1)} \mathbb{1}_{[\frac{l-1}{M}\pi, \frac{l+1}{M}\pi)} E\left(\frac{l\pi}{M}\right)\right)\mathrm{d}x\right| \\ \leq&\frac{M}{4\pi}\cdot 2\pi \cdot C \cdot \frac{\pi}{M} = \frac{C\pi}{2} \end{aligned}$$

Vastaavasti arvioimme Λ_1:ssa esiintyvää summaa samalla vakiolla.

Siispä vakiolla $c = \exp(\frac{C\pi}{2})$, kun $k = 0, 1$,

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\Lambda_k}{\Lambda_*} \leq c,$$

joka pätee siis tasaiseti kaikilla $M \in \mathbb{Z}_{>0}$. Siispä (IV.39) seuraa.

Rajaa IV.40 varten huomautamme, että (λ_2/λ_1) saattaa olla suurinpiirtein 1 suuruinen, mutta muut termit ovat suuruudeltaan enintään $\exp(-\varepsilon_* N L)$, missä

$$L = \begin{cases} \sum_{l=\pm 1,\pm 3,\ldots,\pm(M-1)} n_l, & \text{kun } k=0 \\ (1-\delta_{n_0,n_0^*}) + \sum_{l=\pm 2,\pm 4,\ldots,\pm(M-2),M} n_l, & \text{kun } k=1 \end{cases}$$

ja luvut n_l ovat fermionien miehityslukuja. Siispä

$$\begin{aligned}
&1+\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N+\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^N+\ldots\left(\frac{\lambda_{2^M}}{\lambda_1}\right)^N \\
\leq & 2+2\binom{M}{2}\exp(-2\varepsilon_* N)+2\binom{M}{4}\exp(-4\varepsilon_* N)+\ldots+2\exp(-M\varepsilon_* N) \\
\leq & 2(1+\exp(-2\varepsilon_* N))^M \\
= & 2\Big(1+\frac{1}{M}\underbrace{M\exp(-2\varepsilon_* N)}_{=\exp(\log M-2\varepsilon_* N)\to 0}\Big)^M
\end{aligned}$$

on rajoitettu ja siksi raja-arvo IV.40 katoaa, kun $K_1^* \neq K_2$.

2.3.4. *Vapaan energian symmetrinen muoto*

Jos käytämme Tehtävän IV.13 identiteettiä, saamme symmetrisoitua vapaan energian lauseketta kirjoittamalla

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E(x)\mathrm{d}x \\
&\quad=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cosh^{-1}\left[\cosh(2K_1^*)\cosh(2K_2)-\sinh(2K_1^*)\sinh(2K_2)\cos x\right]\mathrm{d}x \\
&\quad=\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left[2\cosh(2K_1^*)\cosh(2K_2)\right. \\
&\qquad\qquad\left.-2\sinh(2K_1^*)\sinh(2K_2)\cos x-2\cos y\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

ja niin ollen

$$\begin{aligned}
f=-\frac{1}{\beta}\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}&\log\left[2\cosh(2K_1)\cosh(2K_2)\right. \\
&\left.-2\sinh(2K_1)\cos x-2\sinh(2K_2)\cos y\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{IV.42}$$

missä käytimme identiteettiä $\coth(2K_1^*)=\cosh(2K_1)$, jonka todistamisen jätämme lukijalle. Vapaan energian muoto (IV.42) on täysin symmetrinen kytkentävoimakkuuksissa K_1 ja K_2, mikä oli tietysti ilmeinen vaatimus jo alkuperäisestä kaksiulotteisen, anisotrooppisen Isingin mallin määritelmästä. Tämän luvun laskuissa symmetria toimii hyvänä tarkistuskeinona, että lopputulos on järkevä.

Tehtävä IV.13. Osoita identiteetti $2\int_0^{\pi}\log(2\cosh a-2\cos y)=\int_{-\pi}^{\pi}\log(2\cosh a-2\cos y)\mathrm{d}y=2\pi a$.

Vihje. Voit halutessasi vaikkapa aloittaa muuttamalla integraalin $\int_{-\pi}^{\pi}\log(A-Be^{\mathrm{i}y})\,\mathrm{d}y$ kompleksiseksi käyräintegraaliksi, missä integrandi on analyyttinen, ja sitten käyttää residylaskentaa. Kun $A>B>0$, funktiossa $y\mapsto\log(A-Be^{\mathrm{i}y})$ on hyvä suorittaa logaritmin haaran valinta niin, että arvo on reaalinen, kun $y=0$, ja jatkaa vaatimalla jatkuvuus y:ssä.

2.3.5. *Vapaan energian tarkempi analyysi ja termodynaamiset suureet*

Vapaan energian sievennetty muoto, kun $K_1 = K_2$. Valitaan nyt $K_1 = K_2 = \beta$ jolloin

$$\begin{aligned} f = &-\frac{1}{\beta}\frac{1}{2}\log(\sinh(2\beta)) \\ &-\frac{1}{\beta}\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \log\left[2\cosh(2\beta)\coth(2\beta)\ -2\cos x - 2\cos y\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Jos teemme muuttujanvaihdon $z = (x+y)/2$ ja $w = y - x$, jonka Jacobin determinatti on 1, järjestelemme uudelleen intogrointialuetta käyttämällä trigonometristen funktioiden symmetrioita ja käytämme identiteettiä $\cos(z + w/2) + \cos(z - w/2) = 2\cos z\ \cos(w/2)$, niin saamme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \log\left[2\cosh(2\beta)\coth(2\beta) - 2\cos x - 2\cos y\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ =&\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \log\Big[\underbrace{2\cosh(2\beta)\coth(2\beta)}_{=:\frac{2}{\kappa}} -4\cos z\ \cos\frac{w}{2}\Big]\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w \\ =&\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^\pi \log\left[\frac{4}{\kappa} - 4\cos z\ \cos w\right]\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w \\ =&\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log\left(2\cos w\right)\ \mathrm{d}w + \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^\pi \log\left[\frac{2}{\kappa\cos w} - 2\cos z\right]\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w \\ \overset{(*)}{=}&\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log\left(2\cos w\right)\ \mathrm{d}w + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cosh^{-1}\left(\frac{1}{\kappa\cos w}\right)\ \mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Vaiheessa $(*)$ käytimme jälleen Tehtävää IV.13. Edelleen käyttämällä identiteettiä $\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \log\left[2\cosh(2\beta)\coth(2\beta) - 2\cos x - 2\cos y\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ =&\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log\left(\frac{2}{\kappa}\left(1 + \sqrt{1-\kappa^2\cos^2 w}\right)\right)\ \mathrm{d}w \end{aligned}$$

Niinpä lopulta tekemällä muuttujanvaihdon $w \mapsto \pi/2 - w$ saamme lausekkeen

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{\beta}\frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{\kappa}\sinh(2\beta)\right) - \frac{1}{\beta}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log\left(1 + \sqrt{1-\kappa^2\sin^2 w}\right)\ \mathrm{d}w \\ &= -\frac{1}{\beta}\log\left(2\cosh(2\beta)\right) - \frac{1}{\beta}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log\left(1 + \sqrt{1-\kappa^2\sin^2 w}\right)\ \mathrm{d}w. \end{aligned} \tag{IV.43}$$

Olemme saaneet kirjoitettua vapaan energian erittäin ytimekkäässä muodossa, mikä mahdollistaa eräiden termodynaamisten suureiden laskemisen.

Kriittinen β_c. Huomautamme, että funktion

$$\kappa = \kappa(\beta) = \frac{2\sinh(2\beta)}{\cosh^2(2\beta)}$$

derivaatta on

$$\frac{\partial\kappa}{\partial\beta}(\beta) = \frac{4}{\cosh(2\beta)}\left[1 - 2\tanh^2(2\beta)\right], \tag{IV.44}$$

mistä näemme, että κ saavuttaa maksiminsa, kun

$$\tanh(2\beta_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{IV.45}$$

Sanomme tätä β_c:tä *kriittiseksi käänteislämpötilaksi.* Kun $\beta \neq \beta_c$, $\kappa < 1$ ja f on β:n (reaali-) analyyttinen funktio.

Propositio IV.36. *Vapaa energia f on analyyttinen, kun $\beta \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{\beta_c\}$.*

Tämä vastaa melko usein fysiikassa käytettyä kriittisen pisteen määritelmää: kriittisessä pisteessä, jokin termodynaaminen suure on epäanalyyttinen. Toteamme vielä, että

$$\sinh(2\beta_c) = 1, \qquad \cosh(2\beta_c) = \sqrt{2}, \qquad \kappa(\beta_c) = 1.$$

Sisäinen energia ja ominaislämpö. Laskemme alla ominaislämmön β_c:n lähellä. Sisäinen energia on määritelmänsä mukaisesti, kts. Tehtävä II.1,

$$U = \frac{\partial(\beta f)}{\partial \beta} = -\beta^2 \frac{\partial U}{\partial \beta}.$$

Sisäisen energia laskemiseksi tulee laskea derivaatta

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \kappa} \log\left(1 + \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 w}\right) &= -\frac{\kappa \sin^2 w}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 w}\left(1 + \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 w}\right)} \\ &= -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 w}} - 1\right).\end{aligned}$$

Tämän ja yhtälön IV.44 avulla saamme

$$\begin{aligned}U &= -2\tanh(2\beta) - \underbrace{\frac{\partial \kappa}{\partial \beta}\frac{1}{\kappa}}_{=:-2\coth(2\beta)\tilde{\kappa}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 w}}\right) \\ &= -\coth(2\beta)\left[1 + \frac{2\tilde{\kappa}}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 w}}\right]\end{aligned}$$

missä määrittelimme

$$\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}(\beta) = 2\tanh^2(2\beta) - 1.$$

Jätämme seuraavat laskut harjoitustehtäväksi.

Tehtävä IV.14. Olkoon $\kappa = \kappa(\beta) = \frac{2\sinh(2\beta)}{\cosh^2(2\beta)}$ ja $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}(\beta) = 2\tanh^2(2\beta) - 1$. Osoita seuraavat identiteettit

$$\kappa^2 + \tilde{\kappa}^2 = 1, \qquad \frac{\partial \kappa}{\partial \beta} = -\frac{4}{\cosh(2\beta)}\tilde{\kappa}, \qquad \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial \kappa} = -\frac{\kappa}{\tilde{\kappa}}.$$

Määritelemme

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 w}},$$

jota sanotaan (1. lajin täydelliseksi) elliptiseksi integraaliksi. Käyttämällä Tehtävää IV.15 saamme

$$
\begin{aligned}
C_T &= -\beta^2 \frac{\partial U}{\partial \beta} \\
&= \underbrace{\beta^2 \frac{\partial \coth(2\beta)}{\partial \beta} \left[1 + \frac{2\tilde{\kappa}}{\pi} K(\kappa)\right]}_{=\mathcal{O}(1)} + \frac{2}{\pi} \beta^2 \coth(2\beta) \left[\underbrace{\frac{\partial \kappa}{\partial \beta} \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial \kappa}}_{=\mathcal{O}(1)} \underbrace{K(\kappa)}_{=-\frac{1}{2}\log(1-\kappa)+\mathcal{O}(1)} + \underbrace{\tilde{\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \beta} K'(\kappa)}_{=\mathcal{O}(1)} \right] \\
&= -c \log|\beta - \beta_c| + \mathcal{O}(1),
\end{aligned}
$$

kun $\beta \to \beta_c$, missä vakio $c > 0$ ja periaatteessa täysin eksplisiittinen. Eli olemme osoittaneet, että *ominaislämmöllä on logaritminen singlariteetti kriittisessä pisteessä* $\beta = \beta_c$.

Tehtävä IV.15. Määritellään 1. ja 2. lajin täydelliset elliptiset integraalit kaavoilla

$$
K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 w}}, \qquad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 w}\, \mathrm{d}w.
$$

(a) Lähtien kaavoista $(1+x)^\alpha = \sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n$ ja $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(w) \mathrm{d}w = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$ todista seuraavat kehitelmät, kun $k \in (-1, 1)$,

$$
\begin{aligned}
K(k) &= \frac{\pi}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right)^2 k^{2n} \right] \\
E(k) &= \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} \right] \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 w)^{-\frac{3}{2}}\, \mathrm{d}w &= \frac{\pi}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right)^2 (2n+1)\, k^{2n} \right]
\end{aligned}
$$

(b) Todista sarjakehitelmien avulla, että kun $k \nearrow 1$,

$$
K(k) = -\frac{1}{2} \log(1-k) + \mathcal{O}(1), \qquad E(k) = \mathcal{O}(1)
$$

(c) Todista sarjakehitelmien avulla, että

$$
(1 - k^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 w)^{-\frac{3}{2}}\, \mathrm{d}w = E(k),
$$

ja tämän avulla edelleen, että

$$
K'(k) = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k}.
$$

Päättele, että $K'(k) = \mathcal{O}((1-k)^{-1})$, kun $k \nearrow 1$.