2.2.7. *Matriisien* $\mathbf{V}^{(l)}$ *diagonalisointi*

Koska lineaarikuvaukset $\mathbf{V}^{(l)}$, $0 \in [\![1, M]\!] \cap I_k(M)$, kommutoivat, voimme diagonalisoida jokaisen niistä erikseen. Tämän luvun lopussa keräämme nämä tulokset yhteen ja kirjoitamme siirtomatriisien $\mathbf{T}_0$ ja $\mathbf{T}_1$ ominaisvektorit ja ominaisarvot eksplisiittisesti.

Matriisien $\mathbf{V}^{(0)}$ *ja* $\mathbf{V}^{(M)}$ *diagonalisointi*: Matriisit $\mathbf{V}^{(0)}$ ja $\mathbf{V}^{(M)}$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^{(0)} &= \exp\left(-2(K_1^* - K_2)\left(\boldsymbol{\gamma}_0^\dagger\boldsymbol{\gamma}_0 - (1/2)\,\mathbf{I}\right)\right),\\ \mathbf{V}^{(M)} &= \exp\left(-2(K_1^* + K_2)\left(\boldsymbol{\gamma}_M^\dagger\boldsymbol{\gamma}_M - (1/2)\,\mathbf{I}\right)\right)\end{aligned}$$

ovat valmiiksi diagonaalisia. Esimerkiksi, jos $\underline{v}$:lle pätee $\boldsymbol{\gamma}_0\underline{v} = \underline{0}$, niin

$$\mathbf{V}_1^{(0)}\,\underline{v} = \exp(K_1^* - K_2)\,\underline{v}, \qquad \mathbf{V}_1^{(0)}\,\gamma_0^\dagger\underline{v} = \exp(-(K_1^* - K_2))\,\gamma_0^\dagger\underline{v},$$

ja helposti nähdään kantavektoreita $\underline{f}_{\underline{n}}$ tarkastelemalla, että olemme löytäneet kaikki 2^M matriisin $\mathbf{V}_1^{(0)}$:n ominaisvektoria. Vastaavasti, jos $\underline{v}$:lle pätee $\boldsymbol{\gamma}_M\underline{v} = \underline{0}$, niin

$$\mathbf{V}_1^{(M)}\,\underline{v} = \exp(K_1^* + K_2)\,\underline{v}, \qquad \mathbf{V}_1^{(M)}\,\boldsymbol{\gamma}_M^\dagger\underline{v} = \exp(-(K_1^* + K_2))\,\boldsymbol{\gamma}_M^\dagger\underline{v}.$$

Matriisien $\mathbf{V}^{(l)}$*,* $l \in [\![1, M-1]\!]$ *diagonalisointi*: Matriisien $\mathbf{V}^{(l)}$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^{(l)} = \exp&\left(K_2\left(\cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\left(\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger\boldsymbol{\gamma}_l + \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger\boldsymbol{\gamma}_{-l}\right) + \sin\left(\frac{\pi l}{M}\right)\left(\boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger + \boldsymbol{\gamma}_l\boldsymbol{\gamma}_{-l}\right)\right)\right)\\ &\times \exp\left(-2K_1^*\left(\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger\boldsymbol{\gamma}_l + \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger\boldsymbol{\gamma}_{-l} - \mathbf{I}\right)\right)\\ &\times \exp\left(K_2\left(\cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\left(\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger\boldsymbol{\gamma}_l + \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger\boldsymbol{\gamma}_{-l}\right) + \sin\left(\frac{\pi l}{M}\right)\left(\boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger + \boldsymbol{\gamma}_l\boldsymbol{\gamma}_{-l}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

diagonalisoimiseksi huomaamme, että mikäli $\underline{v} \in \mathbb{C}^{2^M}$ on sellainen, että pätee $\boldsymbol{\gamma}_l\underline{v} = \underline{0} = \boldsymbol{\gamma}_{-l}\underline{v}$, niin silloin

$$\begin{aligned}&\mathbf{V}_1^{(l)}\,\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger\underline{v} = \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger\underline{v}, && \mathbf{V}_1^{(l)}\,\boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger\underline{v} = \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger\underline{v},\\ &\mathbf{V}_2^{(l)}\,\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger\underline{v} = \exp\left(K_2\cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right)\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger\underline{v}, && \mathbf{V}_2^{(l)}\,\boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger\underline{v} = \exp\left(K_2\cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right)\boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger\underline{v}.\end{aligned}$$

Kun tarkastelemme vektorien

$$\underline{v}, \qquad \underline{v}_l = \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger\underline{v}, \qquad \underline{v}_{-l} = \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger\underline{v}, \qquad \underline{v}_{-l,l} = \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger\underline{v}$$

virittämää vektoriavaruutta, joka on matriiseille $\mathbf{V}_1^{(l)}$ ja $\mathbf{V}_2^{(l)}$ invariantti $\mathbb{C}^{2^M}$:n invariantti aliavaruus, ovat siis $\underline{v}_l$ ja $\underline{v}_{-l}$ jo valmiiksi ominaisvektoreita.

Diagonalisoimme matriisit edelleen vektorien $\underline{v}, \underline{v}_{-l,l}$ virittämällä aliavaruudella, eli käytännössä alempana diagonalisoimme 2×2-matriisia. Matriisi $\mathbf{V}_1^{(l)}$ on jo diagonaalinen tässä kannassa

$$\mathbf{V}_1^{(l)}\,\underline{v} = \exp(2K_1^*)\,\underline{v}, \qquad \mathbf{V}_1^{(l)}\,\boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger\underline{v} = \exp(-2K_1^*)\,\boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger\underline{v}$$

Valitsemme kantavektorien järjestykseksi $\underline{v}_{-l,l}, \underline{v},$, jolloin

$$\mathbf{V}_1^{(l)} = \begin{pmatrix}\exp(-2K_1^*) & 0\\ 0 & \exp(2K_1^*)\end{pmatrix}.$$

Samassa kannassa $\boldsymbol{\delta}_l^+ = \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger$ ja $\boldsymbol{\delta}_l^- = \boldsymbol{\gamma}_l \boldsymbol{\gamma}_{-l}$ ovat Paulin nosto- ja laskumatriiseja

$$\boldsymbol{\delta}_l^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\delta}_l^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tällä avaruudella $\mathbf{V}_2^{(l)}$:ssä olevat matriisit operoivat niin, että

$$\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_l + \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{-l} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{\delta}_l^+ \boldsymbol{\delta}_l^- = \boldsymbol{\delta}_l^z + \mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger + \boldsymbol{\gamma}_l \boldsymbol{\gamma}_{-l} = \boldsymbol{\delta}_l^+ + \boldsymbol{\delta}_l^- = \boldsymbol{\delta}_l^x$$

missä $\boldsymbol{\delta}_l^x$ ja $\boldsymbol{\delta}_l^z$ ovat x- ja z-Pauli-matriisit kuten edellä. Niinpä, jos merkitsemme

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_l = \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right) \boldsymbol{\delta}_l^z + \sin\left(\frac{\pi l}{M}\right) \boldsymbol{\delta}_l^x,$$

jolle pätee $(\tilde{\boldsymbol{\delta}}_l)^2 = I$, niin

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_2^{(l)} &= \exp\left(K_2\left(\cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)(\boldsymbol{\delta}_l^z + 1) + \sin\left(\frac{\pi l}{M}\right)\boldsymbol{\delta}^x\right)\right) \\
&= \exp\left(K_2 \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right) \exp\left(K_2 \tilde{\boldsymbol{\delta}}_l\right) \\
&= \exp\left(K_2 \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right) \left((\cosh K_2)\,\mathbf{I} + (\sinh K_2)\,\tilde{\boldsymbol{\delta}}_l\right) \\
&= \exp\left(K_2 \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right) \begin{pmatrix} \cosh K_2 + \sinh K_2 \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right) & \sinh K_2 \sin\left(\frac{\pi l}{M}\right) \\ \sinh K_2 \sin\left(\frac{\pi l}{M}\right) & \cosh K_2 - \sinh K_2 \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nyt siis $\underline{v}_{-l,l}$:n ja $\underline{v}$:n virittämällä aliavaruudella

$$\mathbf{V}^{(l)} = \mathbf{V}_2^{(l)} \mathbf{V}_1^{(l)} \mathbf{V}_2^{(l)} = \exp\left(K_2 \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right) \begin{pmatrix} A_l & C_l \\ C_l & B_l \end{pmatrix}$$

missä

$$\begin{aligned}
A_l &= \exp(-2K_1^*)\left(\cosh K_2 + \sinh K_2 \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right)^2 + \exp(2K_1^*)\left(\sinh K_2 \sin\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right)^2 \\
B_l &= \exp(-2K_1^*)\left(\sinh K_2 \sin\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right)^2 + \exp(2K_1^*)\left(\cosh K_2 - \sinh K_2 \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right)^2 \\
C_l &= \sinh K_2 \sin\left(\frac{\pi l}{M}\right)\left[\exp(-2K_1^*)\left(\cosh K_2 + \sinh K_2 \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. + \exp(2K_1^*)\left(\cosh K_2 - \sinh K_2 \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right)\right] \\
&= 2 \sinh K_2 \sin\left(\frac{\pi l}{M}\right)\left[\cosh(2K_1^*)\cosh K_2 - \sinh(2K_1^*)\sinh K_2 \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right]
\end{aligned}$$

Käytimme tässä pientä laskua

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha^2 + \mu\gamma^2 & \lambda\alpha\gamma + \mu\beta\gamma \\ \lambda\alpha\gamma + \mu\beta\gamma & \lambda\gamma^2 + \mu\beta^2 \end{pmatrix}$$

Matriisin

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} A_l & C_l \\ C_l & B_l \end{pmatrix} \tag{IV.31}$$

karakteristinen polynomi on

$$\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - (A_l + B_l)\lambda + (A_l B_l - C_l^2)$$

Kiinteällä l kirjoitetaan

$$A_l = \frac{1}{t}a_+^2 + tb^2, \qquad B_l = \frac{1}{t}b^2 + ta_-^2, \qquad C_l = b\left(\frac{1}{t}a_+ + ta_-\right)$$

missä

$$t = \exp(2K_1^*), \qquad a_\pm = \cosh K_2 \pm \sinh K_2 \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right), \qquad b = \sinh K_2 \sin\left(\frac{\pi l}{M}\right)$$

Tällöin lyhyen laskun jälkeen saamme sievennettyä

$$\begin{aligned} A_l B_l - C_l^2 &= (a_- a_+ - b)^2 \\ &= \left[(\cosh K_2)^2 - (\sinh K_2)\left(\cos^2\left(\frac{\pi l}{M}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right)\right]^2 = 1 \end{aligned}$$

Niinpä karakteristisen polynomin juuret $\lambda_\pm$ toteuttavat $\lambda_-\lambda_+ = 1$ ja ovat siis muotoa $\lambda_\pm = e^{\pm\varepsilon_l}$, missä ε_l määritellään yhtälön

$$\begin{aligned} \cosh\varepsilon_l &= \frac{1}{2}(A_l + B_l) \\ &= \cosh(2K_1^*)\cosh(2K_2) - \sinh(2K_1^*)\sinh(2K_2)\cos\left(\frac{\pi l}{M}\right) \end{aligned} \tag{IV.32}$$

positiivisena ratkaisuna. Käänteisfunktio $\cosh^{-1}$ voidaan kirjoittaa eksplisiittisesti, ja niinpä

$$\varepsilon_l = \log\left(\frac{1}{2}(A_l + B_l) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}(A_l + B_l)\right)^2 - 1}\right).$$

Kutsumme lukua ε_l tilaan, jota l indeksoi, liittyväksi energiaksi. Keskustelemme tästä mielenkiintoisesta tulkinnasta lisää aliluvun 2.2.8 lopussa.

Etsitään λ_+:aa vastaava ominaisvektori vektorina, joka on muotoa $(\sin\theta_l)\underline{v}_{-l,l} + (\cos\theta_l)\underline{v}$. Tällöin θ_l määräytyy tekijää $\pi\,\mathbb{Z}$ vaille ehdosta

$$A_l \sin\theta_l + C_l \cos\theta_l = \lambda_+ \sin\theta_l \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tan\theta_l = \frac{C_l}{\lambda_+ - A_l}. \tag{IV.33}$$

Yritämme vielä kirjoittaa ekvivalentin θ_l:n määräävän ehdon nyt ilman λ_+:aa, koska λ_+:n kaava on melko monimutkainen neliöjuurilausekkeineen. Sievennämme $\tan 2\theta_l$:n lauseketta käyttämällä $\tan\theta_l$:n lauseketta ja karakteristista polynomia:

$$\begin{aligned} \tan 2\theta_l &= \frac{2\sin\theta_l\,\cos\theta_l}{\cos^2\theta_l - \sin^2\theta_l} = \frac{2C_l(\lambda_+ - A_l)}{(\lambda_+ - A_l)^2 - C_l^2} = \frac{2C_l(\lambda_+ - A_l)}{-A_l\lambda_+ + B_l\lambda_+ + A_l^2 - A_l B_l} \\ &= \frac{2C_l}{B_l - A_l}. \end{aligned} \tag{IV.34}$$

Yhtälön (IV.34) ratkaisu θ_l on määritelty tekijää $(\pi/2)\,\mathbb{Z}$ vaille. Tämä ratkaisu toteuttaa yhtälön (IV.33) mikäli lisäksi pätee $\tan\theta_l > 0$, koska $\lambda_+ - A_l = \frac{1}{2}(B_l - A_l) + \sqrt{(\frac{1}{2}(B_l - A_l))^2 + C_l^2} > 0$ ja $C_l > 0$.

Ominaisarvoja $\lambda_\pm$ vastaavat ominaisvektorit ovat ortogonaalisia tavanomaisessa $\mathbb{C}^2$:n sisätulossa, sillä (IV.31) on symmetrinen siispä nämä vektorit ovat

$$\begin{aligned}\underline{w} &= \cos\theta_l\ \underline{v} + \sin\theta_l\ \underline{v}_{-l,l}\\ \underline{w}_{-l,l} &= -\sin\theta_l\ \underline{v} + \cos\theta_l\ \underline{v}_{-l,l}.\end{aligned}$$

2.2.8. *Fermionioperaattorien rotaatio vapaiksi fermionioneiksi*

Kun olemme nyt selvittäneet kaikki siirtomatriisien ominaisvektorit, muunnamme tämän tiedon heldosti luettavaan muotoon esittelemällä vielä uudet perheet fermionisia luomis- ja hävitysoperaattoreita. Mikäli määrittelemme, kun $0 < l < M$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_l &= \cos\theta_l\ \boldsymbol{\gamma}_l + \sin\theta_l\ \boldsymbol{\gamma}^\dagger_{-l} & \boldsymbol{\xi}_{-l} &= \cos\theta_l\ \boldsymbol{\gamma}_{-l} - \sin\theta_l\ \boldsymbol{\gamma}^\dagger_l\\ \boldsymbol{\xi}^\dagger_l &= \cos\theta_l\ \boldsymbol{\gamma}^\dagger_l + \sin\theta_l\ \boldsymbol{\gamma}_{-l} & \boldsymbol{\xi}^\dagger_{-l} &= \cos\theta_l\ \boldsymbol{\gamma}^\dagger_{-l} - \sin\theta_l\ \boldsymbol{\gamma}_l\end{aligned}$$

ja $\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\gamma}_0$, $\boldsymbol{\xi}^\dagger_0 = \boldsymbol{\gamma}^\dagger_0$, $\boldsymbol{\xi}_M = \boldsymbol{\gamma}_M$, $\boldsymbol{\xi}^\dagger_M = \boldsymbol{\gamma}^\dagger_M$. Huomaamme, että perhe näitä operaattoreita, jossa indeksit $l \in I_k(M)$, toteuttaa kanoniset antikommutaatiorelaatiot, kts. Harjoitus IV.12.

Olkoon $0 < l < M$. Mikäli määrittelemme $\underline{w}$ ja $\underline{w}_{-l,l}$ kuten yllä ja lisäksi $\underline{w}_l = \underline{v}_l$ ja $\underline{w}_{-l} = \underline{v}_{-l}$ laskemme helposti

$$\boldsymbol{\xi}_l\,\underline{w} = \underline{0}, \qquad \boldsymbol{\xi}_{-l}\,\underline{w} = \underline{0}, \qquad \boldsymbol{\xi}^\dagger_l\,\underline{w} = \underline{w}_l, \qquad \boldsymbol{\xi}^\dagger_{-l}\,\underline{w} = \underline{w}_{-l} \qquad \boldsymbol{\xi}^\dagger_l\,\underline{w} = \underline{w}_{-l,l}$$

Koska olemme osoittaneet, että ominaisvektoreita $\underline{w}, \underline{w}_l, \underline{w}_{-l}, \underline{w}_{-l,l}$ vastaavat $\mathbf{V}^{(l)}$:n ominaisarvot ovat

$$\exp\left(K_2\cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right) \times \{e^{\varepsilon_l}, 1, 1, e^{-\varepsilon_l}\},$$

voimme kirjoittaa $\mathbf{V}_l$:n muodossa

$$\mathbf{V}^{(l)} = \exp\left(K_2\cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right)\ \exp\left(-\varepsilon_l\left(\boldsymbol{\xi}^\dagger_l\,\boldsymbol{\xi}_l + \boldsymbol{\xi}^\dagger_{-l}\,\boldsymbol{\xi}_{-l} - \mathbf{I}\right)\right)$$

Otetaan siis käyttöön uusi vakuumivektori

$$\underline{g}_{0,0,\ldots,0} = \prod_{l\in I_k(M):\ 0<l<M}\left(\cos\theta_l\ \mathbf{I} + \sin\theta_l\ \boldsymbol{\gamma}^\dagger_{-l}\boldsymbol{\gamma}^\dagger_l\right)\underline{f}_{0,0,\ldots,0}.$$

Tällöin kaikilla $l \in I_k(M)$

$$\boldsymbol{\xi}_l\underline{g}_{0,0,\ldots,0} = 0$$

ja saamme kannan muodossa

$$\underline{g}_{n_{l_1},n_{l_2},\ldots,n_{l_M}} = (\boldsymbol{\xi}^\dagger_{l_1})^{n_{l_1}}\,(\boldsymbol{\xi}^\dagger_{l_1})^{n_{l_1}}\ldots(\boldsymbol{\xi}^\dagger_{l_M})^{n_{l_M}}\ \underline{g}_{0,0,\ldots,0} \tag{IV.35}$$

missä $n_{l_j} \in \{0,1\}$ ja $I_k(M) = \{l_1 < l_2 < \ldots < l_M\}$.

Tehtävä IV.12. Oletetaan, että $a, a^\dagger, b, b^\dagger$ ovat lineaarikuvauksia äärellisdimensioisella vektoriavaruudella V ja että ne toteuttavat kanoniset antikommutaatiosäännöt:

$$[a,a^\dagger]_+ = \mathrm{id}_V, \qquad [a,a]_+ = 0 = [a^\dagger,a^\dagger]_+, \qquad [b,b^\dagger]_+ = \mathrm{id}_V, \qquad [b,b]_+ = 0 = [b^\dagger,b^\dagger]_+$$
$$[a,b]_+ = 0, \qquad [a^\dagger,b]_+ = 0, \qquad [a,b^\dagger]_+ = 0, \qquad [a^\dagger,a^\dagger]_+ = 0$$

(a) Määritellään jollain $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha a + \beta b^\dagger & \xi^\dagger &= \alpha a^\dagger + \beta b\\ \zeta &= \gamma b + \delta a^\dagger & \zeta^\dagger &= \gamma b^\dagger + \delta a\end{aligned}$$

Osoita, että $\xi, \xi^\dagger, \zeta, \zeta^\dagger$ toteuttavat kanoniset antikommutaatiorelaatiot, jos ja vain jos $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \sin\theta$, $\gamma = \pm\cos\theta$, $\delta = \pm(-\sin\theta)$ jollain $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) Oletetaan, että $\underline{v}_0 \in V$ on vektori, jonka a ja b hävittävät

$$a\,\underline{v}_0 = \underline{0} \qquad b\,\underline{v}_0 = \underline{0}$$

ja $\underline{v}_0, \underline{v}_a = a^\dagger\underline{v}_0, \underline{v}_b = b^\dagger\underline{v}_0, \underline{v}_{ab} = a^\dagger b^\dagger\underline{v}_0$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Merkitään niiden virittämää aliavaruutta W:llä. Etsi vektori $\underline{w}_0 \in W$, $\underline{w}_0 \neq \underline{0}$, siten, että $\xi\underline{w}_0 = \underline{0} = \zeta\underline{w}_0$.

Kirjoitamme nyt siirtomatriisit $\mathbf{T}_k$, $k = 0, 1$, erittäin yksinkertaisessa muodossa. Määritellään ε_l, $0 < l < M$, kuten yllä ja lisäksi $\varepsilon_{-l} = \varepsilon_l$ ja

$$\varepsilon_0 = 2(K_1^* - K_2), \qquad\qquad \varepsilon_M = 2(K_1^* + K_2).$$

Huomataan lisäksi, että $\cos 0 + \cos\pi = 0$ ja että

$$\prod_{l \in I_k(M)} \exp\left(K_2 \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right) = \exp\left(K_2 \sum_{l \in I_k(M)} \cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\right) = 1$$

Tällöin olemme osoittaneet seuraavan tuloksen, joka on eräs tämän luvun päätuloksista.

Lause IV.33. *Siirtomatriisit* $\mathbf{T}_0$ *ja* $\mathbf{T}_1$ *voidaan esittää muodossa*

$$\mathbf{T}_k = (2\sinh(2K_1))^{\frac{M}{2}} \prod_{l \in I_k(M)} \exp\left(-\varepsilon_l \left(\boldsymbol{\xi}_l^\dagger\, \boldsymbol{\xi}_l - (1/2)\,\mathbf{I}\right)\right). \tag{IV.36}$$

Muotoa (IV.36) olevien matriisien ominaisvektoreiksi voimme valita täsmälleen kantavektorit (IV.35). Listaamme vielä kaikki ominaisvektorit ja -arvot, joita jatkossa analysoimme: ne ovat

$$\underline{g}_{n_{l_1}, n_{l_2}, \ldots, n_{l_M}}, \qquad (2\sinh(2K_1))^{\frac{M}{2}} \exp\left(-\sum_{m=1}^{M} \varepsilon_l (n_{l_m} - (1/2))\right), \tag{IV.37}$$

missä $n_{l_m} \in \{0, 1\}$ ja $I_k(M) = \{l_1 < l_2 < \ldots < l_M\}$.

Kun siirtomatriisi on tällaista muotoa, sanomme sen muodostuvan *vapaista fermioneista*: "systeemin energia" $\sum_l \varepsilon_l (n_l - 1/2)$ riippuu vain yksittäisten fermionitilojen l miehitysluvuista n_l, eli energia ei sisällä fermioneiden välisiä vuorovaikutustermejä.