2.2.4. *Periodiset reunaehdot ja tilojen pariteetti*

Emme pidä ehtojen $\mathbf{C}_{M+1} = \mathbf{P}\,\mathbf{C}_1$ ja $\mathbf{C}^\dagger_{M+1} = \mathbf{P}\,\mathbf{C}^\dagger_1$ muodosta. Haluaisimme yksinkertaisemman ehdon, jotta voisimme jatkaa laskujamme. Aloitamme lämmittelyllä: määritellään $\mathbf{N} = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{N}_m$. Kantavektorit $\underline{f}_{\underline{n}}$ ovat tämän operaattorin ominaisvektoreita ominaisarvoilla $\sum_{m=1}^{M} n_m$ ja niinpä, mikäli operoimme tällaiseen ominaisvektoriin jollain operaattoreista

$$\mathbf{C}_m\mathbf{C}_{m'}\ , \qquad \mathbf{C}_m\mathbf{C}^\dagger_{m'}\ , \qquad \mathbf{C}^\dagger_m\mathbf{C}_{m'}\ , \qquad \mathbf{C}^\dagger_m\mathbf{C}^\dagger_{m'} \tag{IV.23}$$

tulos on joko $\underline{0}$ tai ominaisarvo vähenee 2:lla, pysyy samana tai kasvaa 2:lla. Joka tapauksessa ominaisarvon, joka on kokonaisluku, parillisuus tai parittomuus säilyy.

Kantavektorit ovat myös operaattorin $\mathbf{P}$ ominaisvektoreita ja $\mathbf{P}$-ominaisarvot kertovat $\mathbf{N}$-ominaisarvon pariteetin, eli

$$\mathbf{P}\ \underline{f}_{(n_1,n_2,\ldots,n_M)} = \left(\prod_{m=1}^{M}(-\boldsymbol{\tau}^z_m)\right)\ \underline{f}_{(n_1,n_2,\ldots,n_M)} = (-1)^{\sum_{m=1}^{M} n_m}\ \underline{f}_{(n_1,n_2,\ldots,n_M)}.$$

Kaikkien järkevien määritelmien mukaan voimmekin kirjoittaa $\mathbf{P} = (-1)^{\mathbf{N}}$. Niinpä operaattori $\mathbf{P}$ kommutoi kaikkien muotoa (IV.23) olevien operaattorien kanssa. Tehtävän IV.8 kohdan (b) mukaan $\mathbf{P}$ kommutoi matriisien $\mathbf{V}_1$ ja $\mathbf{V}_2$ kanssa.

Koska matriisit $\mathbf{P}$ ja $\mathbf{T}$ kommutoivat, ne voidaan diagonalisoida yhtäaikaa, kts. Lause IV.30 seuraavasta aliluvusta. Erityisesti voimme etsiä $\mathbf{T}$:n ominaisarvoja erikseen avaruuksilla

$$\mathcal{V}_k = \mathrm{span}\left(\left\{\underline{f}_{(n_1,n_2,\ldots,n_M)} \ :\ \sum_{m=1}^{N} n_k \equiv k \pmod 2\right\}\right),$$

missä $k = 0, 1$. Eli jaamme siis avaruuden $\mathbb{C}^{2^M}$ suoraksi summaksi $\mathbb{C}^{2^M} = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{V}_1$.

Vastaavalla armumentilla huomaamme, että $\mathbf{P}$ antikommutoi $\mathbf{C}_1$:n ja $\mathbf{C}^\dagger_1$:n kanssa. Siitä syystä

$$\mathbf{C}_{M+1}\ \underline{v} = \begin{cases} -\mathbf{C}_1\ \underline{v} & \text{kun } \underline{v} \in \mathcal{V}_0 \\ \mathbf{C}_1\ \underline{v} & \text{kun } \underline{v} \in \mathcal{V}_1 \end{cases}, \qquad \mathbf{C}^\dagger_{M+1}\ \underline{v} = \begin{cases} -\mathbf{C}^\dagger_1\ \underline{v} & \text{kun } \underline{v} \in \mathcal{V}_0 \\ \mathbf{C}^\dagger_1\ \underline{v} & \text{kun } \underline{v} \in \mathcal{V}_1 \end{cases}.$$

Tämän havainnon takia on järkevää määritellä *kaksi uutta siirtomatriisia*

$$\mathbf{T}_k = (\mathbf{V}_2)^{1/2}\,\mathbf{V}_1\,(\mathbf{V}_2)^{1/2},$$

$k = 0, 1$, koko avaruudella $\mathbb{C}^{2^M}$ käyttämällä kaavoja (IV.21) ja (IV.22), mutta käyttää toisistaan poikkeavia ehtoja $\mathbf{C}_{M+1} = -\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}^\dagger_{M+1} = -\mathbf{C}^\dagger_1$ matriisille $\mathbf{T}_0$ ja $\mathbf{C}_{M+1} = \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}^\dagger_{M+1} = \mathbf{C}^\dagger_1$ matriisille $\mathbf{T}_1$. Operaattori $\mathbf{P}$ kommutoi myös näiden matriisien kanssa ja niinpä nämä matriisit ovat suoran summan hajoitelmassa $\mathbb{C}^{2^M} = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{V}_1$ blokkimatriiseja ja $\mathbf{T}$ on sekoitus $\mathbf{T}_0$:n ja $\mathbf{T}_1$:n blokkeja:

$$\mathbf{T}_0 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{0,00} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{T}_{0,11} \end{array}\right), \qquad \mathbf{T}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{1,00} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{T}_{1,11} \end{array}\right), \qquad \mathbf{T} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{0,00} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{T}_{1,11} \end{array}\right)$$

Yhteenvetona siis jaamme $\mathbf{T}$:n ominaisvektorien $\underline{v}$ etsimistehtävän kahteen osaan:

- $\underline{v} \in \mathcal{V}_0$ ja fermionioperaattorit matriiseissa (IV.21) ja (IV.22) toteuttavat antisykliset reunaehdot: $\mathbf{C}_{M+1} = -\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}^\dagger_{M+1} = -\mathbf{C}^\dagger_1$.
- $\underline{v} \in \mathcal{V}_1$ ja fermionioperaattorit matriiseissa (IV.21) ja (IV.22) toteuttavat sykliset reunaehdot: $\mathbf{C}_{M+1} = \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}^\dagger_{M+1} = \mathbf{C}^\dagger_1$.

2.2.5. *Kommutoivien matriisien diagonalisointi yhtäaikaa*

Käymme tässä aliluvussa jälleen läpi erään lineaarialgebran aputuloksen. Varsinainen tarina jatkuu seuraavassa aliluvussa.

Olkoon V äärellisdimensioinen vektoriavaruus, $d = \dim(V)$. Muistutamme, että sanomme lineaarikuvausta $A : V \to V$ *diagonalisoituvaksi*, jos on olemassa V:n kanta $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_d$ siten, että kaikilla $k \in [\![1, d]\!]$ pätee $A\underline{v}_k = \lambda_k \underline{v}_k$ jollain $\lambda_k \in \mathbb{C}$. Kaksi lineaarikuvausta $A, B : V \to V$ ovat *yhtäaikaa diagonalisoituvia*, jos on olemassa kanta $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_d$ siten, että kaikilla $k \in [\![1, d]\!]$ pätee

$$A\underline{u}_k = \lambda_k \underline{u}_k, \qquad B\underline{u}_k = \mu_k \underline{u}_k$$

jollain $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{C}$.

Lause IV.30. *Jos A ja B ovat diagonalisoituvia ja $[A, B] = 0$, niin A ja B ovat yhtäaikaa diagonalisoituvia.*

Huomautus IV.31. Tämä lause ja todistus yleistyvät helposti myös useammalle kuin kahdelle pareittain kommutoivalle lineaarikuvaukselle.

Todistus. Olkoon $\{\underline{v}_n : n \in [\![1, d]\!]\}$ kuvauksen A ominaisvektorikanta, $A\underline{v}_n = \lambda_n \underline{v}_n$, ja $\{\underline{w}_m : m \in [\![1, d]\!]\}$ kuvauksen B ominaisvektorikanta, $B\underline{w}_m = \mu_m \underline{w}_m$.

Kiinteällä n kirjoitetaan $\underline{v}_n$ kannassa $\{\underline{w}_m\}$

$$\underline{v}_n = \sum_{m=1}^{d} c_m \, \underline{w}_m.$$

Olkoon $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \ldots, \tilde{\mu}_e$, missä $1 \leq e \leq d$, kaikki B:n erilliset ominaisarvot eli pätee $\tilde{\mu}_k \neq \tilde{\mu}_{k'}$, kun $k \neq k'$. Määritellään kaikilla $k \in [\![1, e]\!]$

$$\underline{u}_k^{(n)} = \sum_{m \in [\![1,d]\!] \,:\, \mu_m = \tilde{\mu}_k} c_m \, \underline{w}_m.$$

Tällöin $\underline{v}_n = \sum_{m=1}^{e} \underline{u}_k^{(n)}$.

Huomaamme, että

$$\underline{0} = (A - \lambda_n \, \mathrm{id}_V)\underline{v}_n = \sum_{m=1}^{e} (A - \lambda_n \, \mathrm{id}_V)\underline{u}_k^{(n)}. \tag{IV.24}$$

Nyt käytämme ominaisuutta $[A, B] = 0$. Nimittäin

$$B\left((A - \lambda_n \, \mathrm{id}_V)\underline{u}_k^{(n)}\right) = (A - \lambda_n \, \mathrm{id}_V)\left(B\, \underline{u}_k^{(n)}\right) = \tilde{\mu}_k \, (A - \lambda_n \, \mathrm{id}_V)\underline{u}_k^{(n)}.$$

Siispä joko $(A - \lambda_n \, \mathrm{id}_V)\underline{u}_k^{(n)} = \underline{0}$ tai sitten se on B:n ominaisvektori ominaisarvolla $\tilde{\mu}_k$. Koska vektorien joukko, joista jokainen on saman lineaarioperaattorin ominaisvektori toisistaan eroavilla ominaisarvoilla, on lineaarisesti riippumaton[5], täytyy kaikilla k päteä $(A - \lambda_n \, \mathrm{id}_V)\underline{u}_k^{(n)} = \underline{0}$. Muutoin (IV.24) ei voisi toteutua.

Olemme siis osoittaneet, että $\underline{u}_k^{(n)}$ on sekä A:n että B:n ominaisvektori, kunhan $\underline{u}_k^{(n)} \neq \underline{0}$. Koska $\{v_n\}$ on V:n kanta, joukko

$$\mathcal{U} = \{\underline{u}_k^{(n)} \,:\, n \in [\![1, d]\!],\, k \in [\![1, e]\!]\}$$

virittää koko avaruuden V. Olkoon $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_d\} \subset \mathcal{U}$ mikä tahansa joukon $\mathcal{U}$ maksimaalinen lineaarisesti riippumaton joukko. Tällöin $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_d\}$ on V:n kanta ja jokainen kantavektori on sekä A:n että B:n ominaisvektori. □

---

[5]Oletamme tämän tunnetuksi lineaarialgebrasta.

2.2.6. *Diogonalisaatio tasoaaltoyritteellä*

Ongelman translaatioinvarianssin inspiroimana etsimme uuden fermionikannan $(\boldsymbol{\gamma}_l)$ muodossa

$$\mathbf{C}_m = \frac{c}{\sqrt{M}} \sum_{l \in I_k(M)} e^{\mathrm{i}\frac{\pi m l}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l \tag{IV.25}$$

$$\mathbf{C}_m^\dagger = \frac{\overline{c}}{\sqrt{M}} \sum_{l \in I_k(M)} e^{-\mathrm{i}\frac{\pi m l}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \tag{IV.26}$$

$k = 0, 1$, missä $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, on vakio, joka voisi jopa riippua k:sta. Valitsemme c:n myöhemmin. Tässä

$$I_k(M) = \{l \in [\![-(M-1), M]\!] \,:\, l \equiv 1 - k \pmod 2\}\,.$$

Kun $|c| = 1$, tämä muunnos on unitaarinen, kts. Tehtävä IV.11, ja niinpä

$$\boldsymbol{\gamma}_l = \frac{\overline{c}}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^{M} e^{-\mathrm{i}\frac{\pi m l}{M}} \mathbf{C}_m,$$

$$\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger = \frac{c}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^{M} e^{\mathrm{i}\frac{\pi m l}{M}} \mathbf{C}_m^\dagger,$$

jotka otamme operaattorien $\boldsymbol{\gamma}_m$, $\boldsymbol{\gamma}_m^\dagger$, $m \in [\![-(M-1), M]\!]$, määritelmiksi.

Tarkistamme kaavat (IV.25) ja (IV.26) laskemalla, kun $m, m' \in [\![-(M-1), M]\!]$ ja $m - m' \equiv 0 \pmod 2$)

$$\frac{1}{M} \sum_{l \in I_k(M)} e^{\mathrm{i}\frac{\pi(m-m')l}{M}} = \begin{cases} 1, & \text{kun } m = m' \\ \frac{D_{m,m',k}}{M} \sum_{j=0}^{M-1} q_{m,m'}^j, & \text{kun } m \neq m' \end{cases} \tag{IV.27}$$

$$= \delta_{m,m'}, \tag{IV.28}$$

missä $q_{m,m'} = e^{i2\pi(m-m')/M}$ toteuttaa $q_{m,m'} \neq 1$ ja $q_{m,m'}^M = 1$ ja $D_{m,m',k}$ on jokin eksplisiittinen vakio, jonka arvoa emme tarvitse. Tulos $\sum_{j=0}^{M-1} q_{m,m'}^j = 0$ seuraa geometrisesta summakaavasta. Niinpä

$$\frac{c}{\sqrt{M}} \sum_{l \in I_k(M)} e^{\mathrm{i}\frac{\pi m l}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l = \frac{c}{\sqrt{M}} \sum_{l \in I_k(M)} e^{\mathrm{i}\frac{\pi m l}{M}} \frac{\overline{c}}{\sqrt{M}} \sum_{m'=1}^{M} e^{-\mathrm{i}\frac{\pi m' l}{M}} \mathbf{C}_{m'} \tag{IV.29}$$

$$= \sum_{m'=1}^{M} \left(\frac{1}{M} \sum_{l \in I_k(M)} e^{\mathrm{i}\frac{\pi(m-m')l}{M}} \right) \mathbf{C}_{m'} = \mathbf{C}_m. \tag{IV.30}$$

Kaava (IV.26) todistetaan vastaavasti.

Huomaamme, että nämä $\boldsymbol{\gamma}_m$, $\boldsymbol{\gamma}_m^\dagger$, $m \in I_k(M)$, toteuttavat fermioniset kanoniset antikommutaatio relaatiot muunnoksen unitaarisuuden perusteella, kts. Tehtävä IV.11, erikseen molemmilla $k = 0$ ja $k = 1$, mutta eivät varmastikkaan yhdessä (tätä emme tarvitse mihinkään). Lisäksi $\mathbf{C}_m$, $\mathbf{C}_m^\dagger$ toteuttavat vaaditut syksilyys- tai antisyksilyysehdot, kun käytämme kaavoja (IV.25) ja (IV.26) myös, kun $m = M + 1$:

$$\mathbf{C}_{M+1} = \frac{c}{\sqrt{M}} \sum_{l \in I_k(M)} e^{\mathrm{i}\frac{\pi l}{M}} \underbrace{e^{\mathrm{i}\pi l}}_{=(-1)^{1-k}} \boldsymbol{\gamma}_l = (-1)^{1-k}\, \mathbf{C}_1$$

ja vastaavasti $\mathbf{C}_{M+1}^\dagger = (-1)^{1-k}\, \mathbf{C}_1^\dagger$.

Tehtävä IV.11. Olkoon $C_m, C_m^\dagger$, $m \in [\![1, M]\!]$, lineaarisia kuvauksia äärellisellä vektoriavaruudella V ja oletetaan, että ne toteuttavat kanoniset antikommutaatiorelaatiot:

$$[C_m, C_{m'}]_+ = 0 = [C_m^\dagger, C_{m'}^\dagger]_+, \qquad [C_m, C_{m'}^\dagger]_+ = \delta_{m,m'}\,\mathrm{id}_V\,.$$

Olkoon $\mathbf{U} = (U_{j,m})_{(j,m)\in[\![1,M]\!]^2}$ unitaarinen, eli pätee $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}$, missä $\mathbf{U}^*$ on $\mathbf{U}$:n adjungaatti- ja $\mathbf{U}^{-1}$ on $\mathbf{U}$:n käänteismatriisi. Määritellään $\gamma_j = \sum_{m=1}^M U_{j,m} C_m$ ja $\gamma_j^\dagger = \sum_{m=1}^M \overline{U}_{j,m} C_m^\dagger$.

(a) Osoita, että näin määritellyt lineaarikuvaukset $\gamma_j, \gamma_j^\dagger$, $j \in [\![1, M]\!]$, toteuttavat kanoniset antikommutaatiorelaatiot:

$$[\gamma_j, \gamma_{j'}]_+ = 0 = [\gamma_j^\dagger, \gamma_{j'}^\dagger]_+, \qquad [\gamma_j, \gamma_{j'}^\dagger]_+ = \delta_{j,j'}\,\mathrm{id}_V\,.$$

(b) Etsi matriisit $(V_{m,j})_{(m,j)\in[\![1,M]\!]^2}$ ja $(W_{m,j})_{(m,j)\in[\![1,M]\!]^2}$ siten, että $C_m = \sum_{j=1}^M V_{m,j}\gamma_j$ ja $C_m^\dagger = \sum_{j=1}^M W_{m,j}\gamma_j^\dagger$.

Käytetään nyt kaavoja (IV.25) ja (IV.26) kirjoittamaan $\mathbf{T}_k$ fermioneiden $\boldsymbol{\gamma}_m$, $\boldsymbol{\gamma}_m^\dagger$, $m \in I_k(M)$, avulla. Tarkastellaan esityksen yksinkertaistamiseksi vain *tapausta, jossa M on parillinen* koko loppuluvun ajan. Tällöin indeksijoukot ovat

$$I_0(M) = \{\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(M-1)\}$$
$$I_1(M) = \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots, \pm(M-2), M\}.$$

Suoralla laskulla huomaamme,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^M \mathbf{C}_m^\dagger \mathbf{C}_m &= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^M \sum_{l\in I_k(M)} \sum_{l'\in I_k(M)} e^{\mathrm{i}\frac{\pi m(l'-l)}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{l'} \\ &= \sum_{l\in I_k(M)} \sum_{l'\in I_k(M)} \underbrace{\frac{1}{M}\sum_{m=1}^M e^{\mathrm{i}\frac{\pi m(l'-l)}{M}}}_{=\delta_{l,l'}} \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{l'} = \sum_{l\in I_k(M)} \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_l\end{aligned}$$

Vastaavasti kun $k = 0$,

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^M (\mathbf{C}_m^\dagger - \mathbf{C}_m)(\mathbf{C}_{m+1}^\dagger + \mathbf{C}_{m+1}) \\ =&\frac{1}{M}\sum_{m=1}^M \sum_{l\in I_0(M)} \sum_{l'\in I_0(M)} \Big(\overline{c}^2\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi(-ml-(m+1)l')}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{l'}^\dagger + e^{\mathrm{i}\frac{\pi(-ml+(m+1)l')}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{l'} \\ &\qquad - e^{\mathrm{i}\frac{\pi(ml-(m+1)l')}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l \boldsymbol{\gamma}_{l'}^\dagger - c^2\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi(ml+(m+1)l')}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l \boldsymbol{\gamma}_{l'}\Big) \\ =& \sum_{l\in I_0(M)} \sum_{l'\in I_0(M)} \Big(\overline{c}^2\, \delta_{l',-l}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi l}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{l'}^\dagger + \delta_{l',l}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi l}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{l'} \\ &\qquad - \delta_{l',l}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi(-l)}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l \boldsymbol{\gamma}_{l'}^\dagger - c^2\, \delta_{l',-l}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi(-l)}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l \boldsymbol{\gamma}_{l'}\Big) \\ =& 2\sum_{l\in I_0(M);\, l>0} \left(\cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\left(\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_l + \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{-l}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi l}{M}\right)\left(\overline{c}^2\, \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger + c^2\, \boldsymbol{\gamma}_l \boldsymbol{\gamma}_{-l}\right)\right) \\ =& 2\sum_{l\in I_0(M);\, l>0} \left(\cos\left(\frac{\pi l}{M}\right)\left(\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_l + \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{-l}\right) + \sin\left(\frac{\pi l}{M}\right)\left(\boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger + \boldsymbol{\gamma}_l \boldsymbol{\gamma}_{-l}\right)\right),\end{aligned}$$

missä valitsimme $c = e^{-\mathrm{i}\pi/4}$ ja kommutoimme yleisen periaatteen mukaisesti operaattorit niin, että luomisoperaattorit ovat vasemalla indeksit kasvavassa ja hävitysoperaattorit oikealla indeksit laskevassa järjestyksessä. Kun $k = 1$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{M} (\mathbf{C}_m^\dagger - \mathbf{C}_m)(\mathbf{C}_{m+1}^\dagger + \mathbf{C}_{m+1}) \\
&= \sum_{l \in I_1(M)} \sum_{l' \in I_1(M)} \bigg(\bar{c}^2 \left((\delta_{l',-l} + \delta_{l=M}\delta_{l'=M} \right) e^{\mathrm{i}\frac{\pi l}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{l'}^\dagger + \delta_{l',l}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi l}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{l'} \\
&\qquad\qquad - \delta_{l',l}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi(-l)}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l \boldsymbol{\gamma}_{l'}^\dagger - c^2 \left((\delta_{l',-l} + \delta_{l=M}\delta_{l'=M} \right) e^{\mathrm{i}\frac{\pi(-l)}{M}} \boldsymbol{\gamma}_l \boldsymbol{\gamma}_{l'} \bigg) \\
&\overset{(*)}{=} \left(2\boldsymbol{\gamma}_0^\dagger \boldsymbol{\gamma}_0 - \mathbf{I} \right) - \left(2\boldsymbol{\gamma}_M^\dagger \boldsymbol{\gamma}_M - \mathbf{I} \right) \\
&\quad + 2 \sum_{l \in I_1(M);\, 0<l<M} \left(\cos\left(\frac{\pi l}{M}\right) \left(\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_l + \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{-l} \right) + \sin\left(\frac{\pi l}{M}\right) \left(\boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger + \boldsymbol{\gamma}_l \boldsymbol{\gamma}_{-l} \right) \right),
\end{aligned}
$$

missä yhtäsuuruutta $(*)$ varten käytimme sitä, että $(\boldsymbol{\gamma}_0)^2 = 0 = (\boldsymbol{\gamma}_0^\dagger)^2$ ja $(\boldsymbol{\gamma}_M)^2 = 0 = (\boldsymbol{\gamma}_M^\dagger)^2$ ja otimme termit $l = 0$ ja $l = M$ erilleen.

Määrittelemme matriisit $\mathbf{V}_1^{(l)}$ ja $\mathbf{V}_2^{(l)}$, kun $l \in [\![0, M]\!]$,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_1^{(l)} &= \exp\left(-2K_1^* \left(\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_l + \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{-l} - \mathbf{I} \right) \right), && \text{kun } l \in [\![1, M-1]\!] \\
\mathbf{V}_1^{(0)} &= \exp\left(-2K_1^* \left(\boldsymbol{\gamma}_0^\dagger \boldsymbol{\gamma}_0 - (1/2)\, \mathbf{I} \right) \right), \\
\mathbf{V}_1^{(M)} &= \exp\left(-2K_1^* \left(\boldsymbol{\gamma}_M^\dagger \boldsymbol{\gamma}_M - (1/2)\, \mathbf{I} \right) \right), \\
\mathbf{V}_2^{(l)} &= \exp\bigg(K_2 \bigg(\cos\left(\frac{\pi l}{M}\right) \left(\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger \boldsymbol{\gamma}_l + \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger \boldsymbol{\gamma}_{-l} \right) \\
&\qquad + \sin\left(\frac{\pi l}{M}\right) \left(\boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger \boldsymbol{\gamma}_l^\dagger + \boldsymbol{\gamma}_l \boldsymbol{\gamma}_{-l} \right) \bigg) \bigg), && \text{kun } l \in [\![1, M-1]\!] \\
\mathbf{V}_2^{(0)} &= \exp\left(K_2 \left(\boldsymbol{\gamma}_0^\dagger \boldsymbol{\gamma}_0 - 1/2 \right) \right) \\
\mathbf{V}_2^{(M)} &= \exp\left(-K_2 \left(\boldsymbol{\gamma}_M^\dagger \boldsymbol{\gamma}_M - 1/2 \right) \right)
\end{aligned}
$$

Propositio IV.32. *Matriisit* $\mathbf{T}_0$ *ja* $\mathbf{T}_1$ *voidaan kirjoittaa muodossa*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}_0 &= (2\sinh(2K_1))^{\frac{M}{2}} \prod_{l=1,3,5,\ldots,M-1} \mathbf{V}^{(l)} \\
\mathbf{T}_1 &= (2\sinh(2K_1))^{\frac{M}{2}} \prod_{l=0,2,4,\ldots,M} \mathbf{V}^{(l)},
\end{aligned}
$$

missä $\mathbf{V}^{(l)} = \mathbf{V}_2^{(l)} \mathbf{V}_1^{(l)} \mathbf{V}_2^{(l)}$. *Matriisit* $\mathbf{V}^{(l)}$ *kommutoivat ja siksi tulojen järjestyksellä ei ole väliä.*

Todistus. Matriisien $\mathbf{V}^{(l)}$ kommutointi seuraa siitä, että ne koostuvat fermionioperaattorien parillisista potensseista ja eri matriiseissa fermionioperaattorien indeksit ovat erilliset. Matriisien $\mathbf{T}_0$ ja $\mathbf{T}_1$ esitykset seuraavat yllä olevista laskuista ja matriisien $\mathbf{V}^{(l)}$ kommutoinnista. □

Tässä vaiheessa olemme siis saattaneet matriisit $\mathbf{T}_0$ ja $\mathbf{T}_1$ tuloiksi melko yksinkertaisista matriiseista, jotka kommutoivat ja siksi ne voidaan diagonalisoida yhtäaikaa erikseen. Nämä yksinkertaiset matriisit $\mathbf{V}^{(l)}$ ovat blokkidiagonaalimuotoa, jossa blokit ovat joko kokoa 4×4 vastaten matriiseja $\boldsymbol{\gamma}_l^\dagger, \boldsymbol{\gamma}_{-l}^\dagger, \boldsymbol{\gamma}_l, \boldsymbol{\gamma}_{-l}$, jotka jättävät neliulotteiset aliavaruudet $\operatorname{span}\{\underline{f}_{\underline{n}} : n_{-l} = 0, 1,\ n_l = 0, 1\}$ invarianteiksi, tai samalla tulkinnalla kokoa 2×2 vastaten matriiseja $\boldsymbol{\gamma}_0^\dagger, \boldsymbol{\gamma}_0$ tai $\boldsymbol{\gamma}_M^\dagger, \boldsymbol{\gamma}_M$. Olemme siis tehneet jo suurimman osan työstä, kun olemme redusoineet valtavan, kokoa $2^M \times 2^M$ olevan matriisin diagonalisoimisen usean pienen, kiinteädimensioisen matriisin diagonalisointiin.