Osa III

Jatkuva-aikaisia satunnaisprosesseja

1. Brownin liike

Kuten edellä usein, tarkastelemme satunnaissummaa $S = (S_n)_{n\geq 0}$, jolle $S_0 = 0$ ja

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j.$$

Tehdään tälle satunnaiskävelylle paloittain lineaarinen jatko asettamalla kaikilla reaaliluvuilla $t \geq 0$

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(S_{\lfloor nt \rfloor} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \right). \tag{III.1}$$

Tässä $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ on reaaliluvun $x \in \mathbb{R}$ kokonaislukuosa eli se toteuttaa $x = \lfloor x \rfloor + r$ jollain $r \in [0, 1)$.

Tämä luku tähtää seuraavan tulokseen satunnaiskävelyn suppenemisesta Brownin liikkeeseen.

Lause III.1 (Donsker). *Jos ξ_j ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja $\mathsf{P}[\xi_j = -1] = \mathsf{P}[\xi_j = +1] = 1/2$, niin $X^{(n)} = (X_t^{(n)})_{t\geq 0}$ suppenee kohti Brownin liikettä heikon suppenemisen mielessä jatkuvien funktioiden avaruudella.*

Ennen lauseen todistusta käymme läpi Brownin liikkeen määritelmän (Luku 1.2) ja yleistä asiaa jatkuvien funktioiden avaruudesta (metrisenä avaruutena) ja todennäköisyysmittojen heikosta suppenemisesta metrisellä avauudella (Luku 1.3).

1.1. Useampiulotteinen normaalijakauma

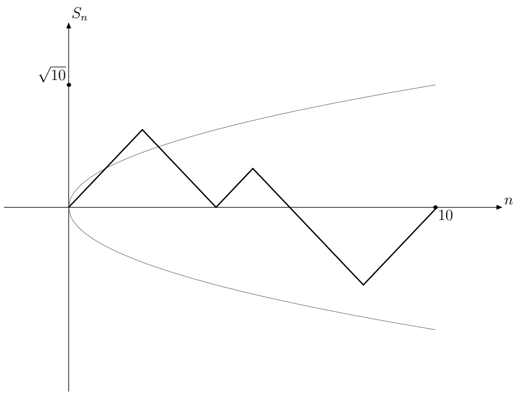
Koska riippumattomien normaalijakautuneiden satunnaismuuttujien summa on edelleen normaalijakautunut, on useampiulotteista normaalijakaumaa kätevää tarkastella seuraavan määritelmän kautta. Huomataan, ettei tämä määritelmä edellytä todennäköisyystiheyden olemassaoloa.

Määritelmä III.2. Satunnaisvektori $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^d$ on *gaussinen vektori*, jos kaikilla vektoreilla $\underline{a} \in \mathbb{R}_d$ satunnaismuuttuja

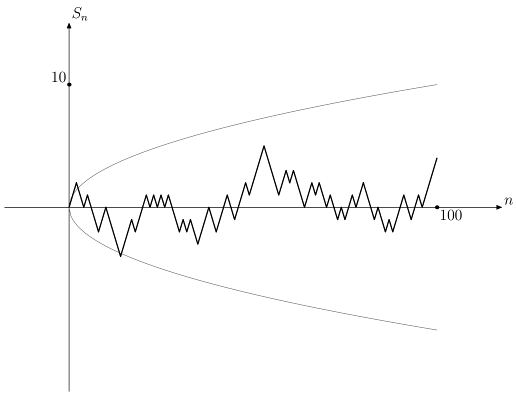
$$\underline{a} \cdot \underline{\xi} = \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k$$

on normaalijakautunut.

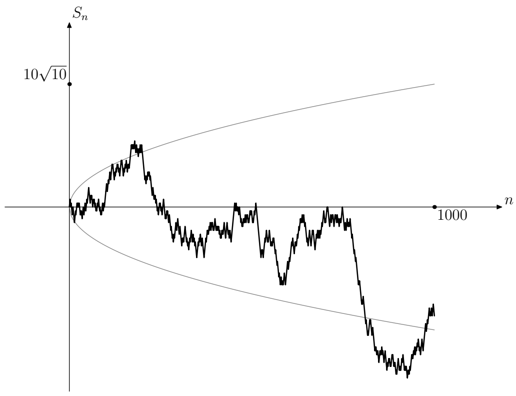
Huomautus III.3. Jos $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ovat riippumattomia ja normaalijakautuneita, niin satunnaisvektori $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ on gaussinen vektori.



(a) Satunnaiskävely aikaan $n = 10$ asti.



(b) Saman kävelyn jatko $n = 100$ asti.



(c) Saman kävelyn jatko $n = 1000$ asti.

Kuva III.1. Satunnaiskävely eri aika- ja pituusskaaloissa. Kuviin on piirretty käyrät $(t, \pm\sqrt{t})$, jotka pysyvät invariantteina yhtälön (III.1) mukaisissa skaalauksissa.

Huomaamme myös, että jokainen gaussisen vektorin komponentti on normaalijakautunut. Päinvastainen väite ei pidä kuitenkaan paikkaansa: on helppo antaa esimerkkejä satunnaisista vektorista, jonka komponentit ovat normaalijakautuneita, mutta jokin lineaarikombinaatio ei ole.

Esim. jos ξ on normaalijakautunut ja satunnaismuuttuja ζ määritellään

$$\zeta = \begin{cases} \xi & , \text{ kun } |\xi| \leq 1 \\ -\xi & , \text{ kun } |\xi| > 1 \end{cases},$$

niin silloin vektorin (ξ, ζ) komponentit ovat normaalijakautuneita, mutta vaikkapa lineaarikombinaatio $\xi + \zeta$ ei ole normaalijakautunut.

Gaussisen vektorin jakauma määräytyy *odotusarvovektorista* $\underline{m} \in \mathbb{R}^n$ ja *kovarianssimatriisista* $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\underline{M} = (\mathsf{E}\xi_1, \ldots, \mathsf{E}\xi_n), \qquad C_{ij} = \mathsf{Cov}(\xi_i, \xi_j).$$

Nähdäksemme tämän huomaamme, että jos $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ on gaussinen vektori, niin satunnaismuuttujan $X = \sum_{k=1}^n \theta_k \xi_k$ odotusarvo ja varianssi ovat

$$m = \sum_{k=1}^n \theta_k M_k \quad \text{ja} \quad \sigma^2 = \sum_{i,j=1}^n \theta_i \theta_j C_{ij}.$$

Koska tämä satunnaismuuttuja on normaalijakautunut, voimme käyttää sen karakteristista funktiota $\chi_X(\eta) = \exp(i\eta m - (\eta^2\sigma^2)/2)$ laskeaksemme vektorin $\underline{\xi}$ karakteristisen funktion

$$\begin{aligned}\chi_{\underline{\xi}}(\underline{\theta}) &= \chi_{\underline{\xi}}(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \mathsf{E}\big[\exp(i\underline{\theta} \cdot \underline{\xi})\big] \\ &= \mathsf{E}\big[\exp(iX)\big] = \exp(im - \sigma^2/2) \\ &= \exp\left(i\sum_{k=1}^{n} \theta_k M_k - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \theta_j\theta_k C_{jk}\right).\end{aligned}$$

Koska $\underline{\xi}$ jakauma määräytyy karakteristisesta funktiosta, on $\underline{\xi}$:n jakauma $\underline{M}$:n ja C:n määräämä. Tämän havainnon eräs sovellus on seuraava tulos, jonka olemme jo oleellisesti todistaneet.

Propositio III.4. *Jos $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ on gaussinen vektori, niin silloin seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä:*

(1) $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *ovat riippumattomia.*
(2) C_{jk} *on diagonaalinen eli* $\mathsf{Cov}[\xi_j, \xi_k] = 0$, *kun* $j \neq k$.

Jätämme harjoitustehtäväksi seuraavan useampiulotteista normaalijakaumaa koskevan tuloksen, joka yhdistää Määritelmän III.2 ja tavanomaisemman määritelmän useampiulotteiselle normaalijakaumalle.

Tehtävä III.1. Olkoon $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ satunnainen vektori, jolla on todennäköisyystiheys $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Osoita, että jos matriisi $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on symmetrinen ja positiivinen ($\underline{v}^\top C \underline{v} > 0$ kaikilla $\underline{v} \neq 0$), $\underline{M} \in \mathbb{R}^n$ ja tiheys p voidaan kirjoittaa muodossa

$$p(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\det(C)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{M})^\top\, C^{-1}\, (\underline{x} - \underline{M})\right),$$

niin $\underline{\xi}$ on gaussinen vektori odotusarvovektorilla $\underline{M}$ ja kovarianssimatriisilla C.

1.1.1. *Gaussinen prosessi*

Yllä olevaa gaussisen vektorin määritelmää yleistäen määrittelemme gaussisen prosessin. Määritelmä merkitsee sitä, että valitsimmepa minkä tahansa äärellisen aika joukon, jolla prosessin arvoja tarkastelemme, on sen jakauma aina gaussinen.

Määritelmä III.5. Stokastinen prosessi $X = (X_t)_{t \geq 0}$ on *gaussinen prosessi*, jos kaikilla n ja $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ vektori $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ on gaussinen.

1.2. Brownin liikkeen määritelmä

1.2.1. *Stationaariset ja riippumattomat lisäykset*

Seuraava määritelmä täsmentää, mitä tarkoitamme stationaarisilla ja riippumattomilla lisäyksillä. Vastaavat diskreetit versiot ovat voimassa (yksinkertaiselle) satunnaiskävelylle.

Määritelmä III.6. Stokastisella prosessilla $X = (X_t)_{t\geq 0}$ on *stationaariset lisäykset*, jos satunnaismuuttujan $X_{t+s} - X_t$ jakauma ei riipu t:stä. Sillä on *riippumattomat lisäykset*, jos satunnaismuuttujat $\{X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\}$ ovat riippumattomia kaikilla n ja kaikilla $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

Seuraava esimerkki on eräs prosessi, jolla on stationaariset ja riippumattomat lisäykset.

Esimerkki III.7 (Poisson-prosessi)**.** *Poisson-prosessi* $N = (N_t)_{t\geq 0}$ parametrilla $\lambda > 0$ on jatkuva aikainen stokastinen prosessi, joka toteuttaa ehdot

(1) Alkuarvo on $N_0 = 0$
(2) Funktio $t \mapsto N_t(\omega)$ on ei-vähenevä, oikealta jatkuva porrasfunktio, jonka hypyt ovat suuruudeltaan 1
(3) Lisäykset ovat riippumattomia ja lisäyksen $N_{t+s} - N_t$ jakauma on Poisson(λs) kaikilla $s, t \geq 0$.

Poisson-prosessi voidaan konstruoida seuraavasti. Olkoon $(\xi_k)_{k\geq 1}$ jono riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden jakauma on eksponenttijakauma parametrilla $\lambda > 0$. Määritellään kaikilla $t \geq 0$

$$N_t = \#\left\{ n \geq 1 \,:\, \sum_{k=1}^{n} \xi_k \leq t \right\}.$$

Tällöin $(N_t)_{t\geq 0}$ toteuttaa yllä olevat vaatimukset.

1.2.2. *Brownin liikkeen määritelmä*

Brownin liikkeen määritelmässä käytämme jompaa kumpaa seuraavista yhtäpitävistä ehdoista.

Propositio III.8. *Seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä stokastiselle prosessille $X = (X_t)_{t\geq 0}$:*

(a) *X:n lisäykset ovat riippumattomat ja stationaariset, ja X_t:n jakauma on $N(0,t)$.*
(b) *X on gaussinen prosessi, jolle $\mathsf{E}[X_t] = 0$ ja $\mathsf{Cov}(X_s, X_t) = \min\{s,t\}$.*

Huomautus III.9. Todennäköisyysteoriassa $\min\{s,t\} =: s \wedge t$ ja $\max\{s,t\} =: s \vee t$ ovat yleisesti käytettyjä merkintöjä.

Todistus. Oletetaan, että väittämä (a) pitää paikaansa. Olkoon $0 = t_0 < t_1 < t_2 \ldots t_n$ ja $a_k \in \mathbb{R}$. Silloin jollain $b_k \in \mathbb{R}$ pätee (ns. osittaissummauskaava)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k X_{t_k} = \sum_{k=1}^{n} b_k (X_{t_k} - X_{t_{k-1}}).$$

Koska lisäykset $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ ovat riippumattomia ja normaalijakautuneita, on tämä satunnaismuuttuja normaalijakautunut. Prosessi X on siis gaussinen. Lisäysten riippumattomuutta käyttämällä saamme kovarianssiksi, kun $s < t$,

$$\mathsf{Cov}(X_t, X_s) = \mathsf{E}[X_t\, X_s] = \mathsf{E}\big[X_s^2\big] + \mathsf{E}[(X_t - X_s)\, X_s] = s.$$

Väittämä (b) seuraa tästä.

Oletetaan nyt, että väittämä (b) pätee. Kaikilla $0 \leq s < t$, lisäys $X_t - X_s$ on normaalijakautunut odotusarvolla $\mathsf{E}[X_t - X_s] = \mathsf{E}[X_t] - \mathsf{E}[X_s] = 0$ ja varianssilla

$$\mathsf{Var}[X_t - X_s] = \mathsf{Var}[X_t] - 2\mathsf{Cov}[X_t, X_s] + \mathsf{Var}[X_s] = t - 2(s \wedge t) + s = t - s.$$

Siispä lisäykset ovat stationaariset ja $X_t \sim N(0,t)$.

Lisäysten riippumattomuuden osoittamiseksi valitaan $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ ja huomataan, että

$$(X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$

gaussinen vektori. Gaussisuuden perusteella satunnaisvektorin komponentit ovat riippumaton kokoelma sataunnaismuuttujia, jos ja vain jos ne ovat korreloimattomia, kts. Propositio III.4. Nyt kaikilla $0 \leq s < t < u$

$$\begin{aligned}\mathsf{Cov}[X_t - X_s, X_u - X_t] &= \mathsf{Cov}[X_t, X_u] - \mathsf{Cov}[X_t, X_t] - \mathsf{Cov}[X_s, X_u] + \mathsf{Cov}[X_s, X_t] \\ &= t - t - s - s = 0.\end{aligned}$$

Siispä väittämä (a) seuraa. □

Määritelmä III.10. Stokastinen prosessi $X = (X_t)_{t\geq 0}$ on *jatkuva prosessi*, jos

$$\mathsf{P}\big[\{\omega \,:\, t \mapsto X_t(\omega) \text{ on jatkuva}\}\big] = 1.$$

Määritelmä III.11. *Standardi Brownin liike* on stokastinen prosessi $B = (B_t)_{t\geq 0}$, joka toteuttaa ehdot

(1) B on jatkuva prosessi
(2) B toteuttaa jomman kumman Proposition III.8 yhtäpitävistä ehdoista.

Oletamme toistaiseksi, että standardi Brownin liike on olemassa jollain todennäköisyysavaruudella. Palaamme tähän Luvussa 1.4.

1.2.3. *Kommentteja ja vastaesimerkkejä*

On tärkeä huomata, että standardin Brownin liikkeen jatkuvuusvaatimus on epätriviaali. Mikäli $X = (X_t)_{t\geq 0}$ on stokastinen prosessi, joka toteuttaa Proposition III.8 ehdot, ja $\tau \geq 0$ on X:stä riippumaton jatkuva satunnaismuuttuja, niin silloin myös prosessi $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$, jonka määrittelemme

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega) & , \text{ kun } t \neq \tau(\omega) \\ X_t(\omega) + 1 & , \text{ kun } t = \tau(\omega), \end{cases}$$

toteuttaa Proposition III.8 ehdot. Prosessit X ja Y eivät molemmat voi olla jatkuvia. Sanomme, että X ja Y ovat versioita toisistaan ja vain toinen voi olla jatkuva versio Brownin liikkeestä.

Määritelmä III.12. Sanomme, että $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ja $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ ovat *versiota toisistaan*, mikäli kaikilla $t \geq 0$ pätee $\mathsf{P}[X_t = Y_t] = 1$.

Tämän lisäksi haluamme konstruoida Brownin liikkee todennäköisyysavaruudella, jossa tapahtuma $\{\omega \,:\, t \mapsto B_t(\omega) \text{ on jatkuva}\}$ on mitallinen. Tämä tapahtuma riippuu periaatteessa ylinumeroituvasta määrästä prosessin arvoja B_t ja huono todennäköisyysavaruuden valinta johtaisi vaikeuksiin.