Todennäköisyys ja statistinen fysiikka

Probability and statistical physics

Antti Kemppainen <Antti.H.Kemppainen@helsinki.fi> B416, ma 14-15
Kalle Kytölä <Kalle.Kytola@helsinki.fi> A406, to 16-17

Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

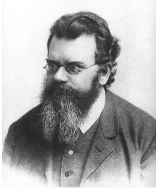
kevätlukukausi 2014
periodit III & IV

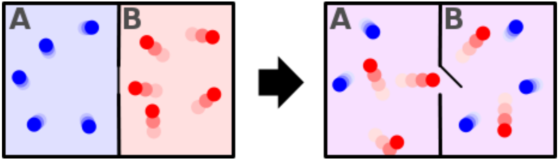
Kurssin aihepiiri: statistinen fysiikka

Historiaa:

- Termodynaamiset lait (~1650-1850)
- Statistinen mekaniikka
  - * Daniel Bernoulli (1738): kaasujen kineettinen teoria
  - * James Clerk Maxwell (~1860)
  - * Ludwig Boltzmann (~1870)
  - * J. Willard Gibbs (~1900)

  ⋮





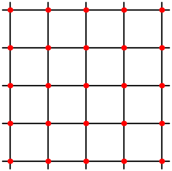
Hiukkasten lkm ~ 1000000000000000000000000

Termodynaaminen raja: Mikroskooppisen tason satunnaisuudesta seuraa deterministisiä termodynamiikan lakeja kun hiukkasten lukumäärä N on suuri ($N \to \infty$).

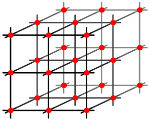
Esimerkki I: Satunnaiskävely kuutiohilalla $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2, 3, \dots$

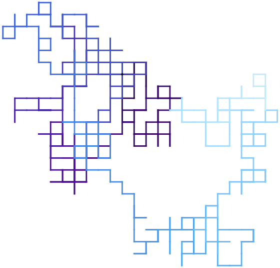
$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}^2$

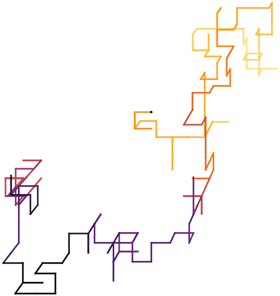


$\mathbb{Z}^3$





$d = 2$

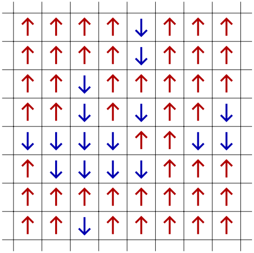


$d = 3$

Esimerkki II: Ferromagneetin matemaattinen malli

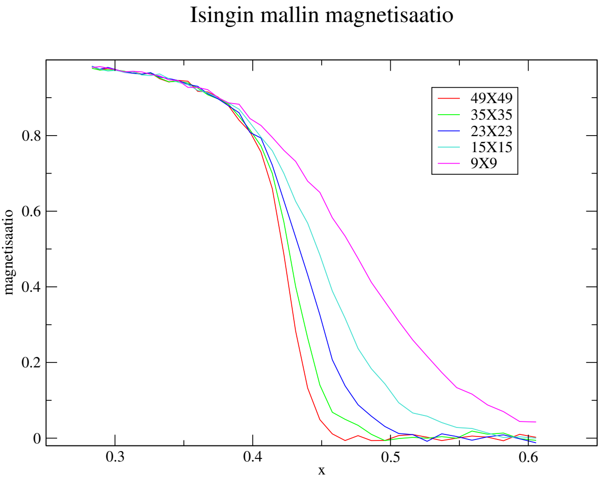
Isingin malli:

- $L \times L$ neliöhila, jokainen neliö magnetoitunut ylös($\uparrow$) tai alas($\downarrow$)
- konfiguraation todennäköisyys $\sim x^{\text{erimielisten naapurien lkm}}$
- pieni/suuri $x \leftrightarrow$ matala/korkea lämpötila



Termodynaaminen raja: $L \to \infty$

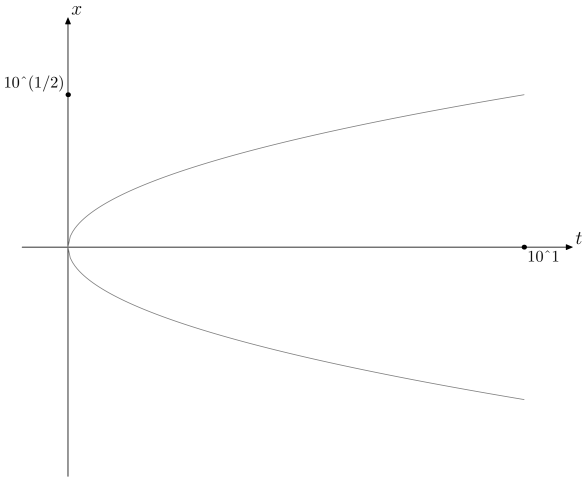
Esimerkki II: Faasitransitio ferromagneetissa



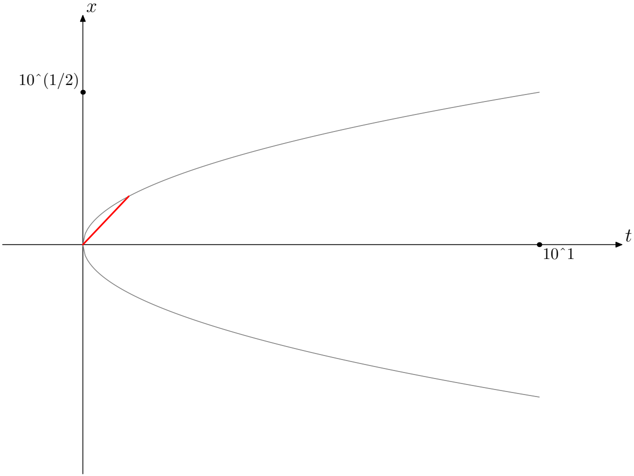
matala lämpötila: $x < \sqrt{2} - 1$
ferromagneettinen
$\lim_{L\to\infty}(\text{magn.}) \neq 0$

korkea lämpötila: $x > \sqrt{2} - 1$
paramagneettinen
$\lim_{L\to\infty}(\text{magn.}) = 0$

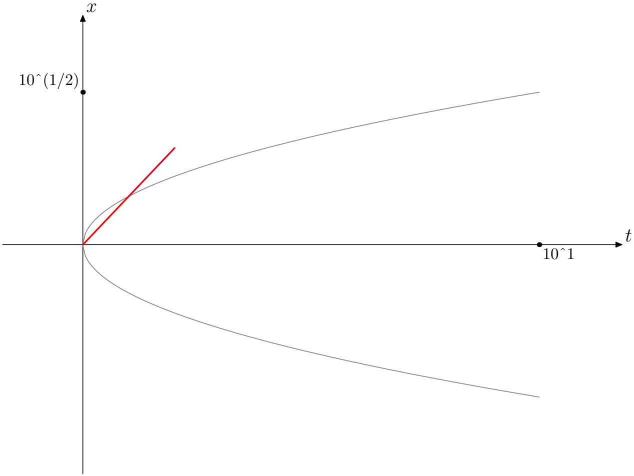
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



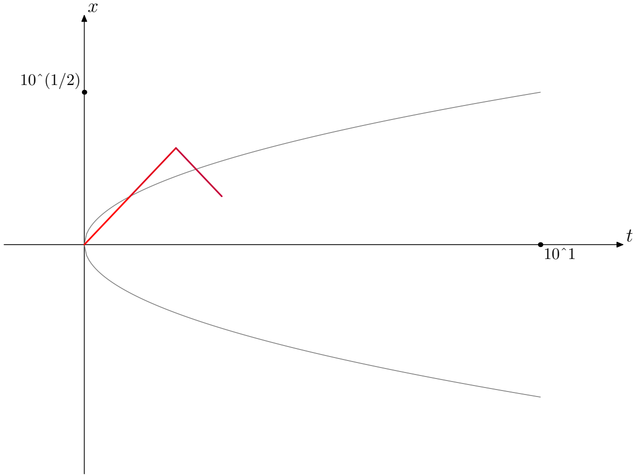
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



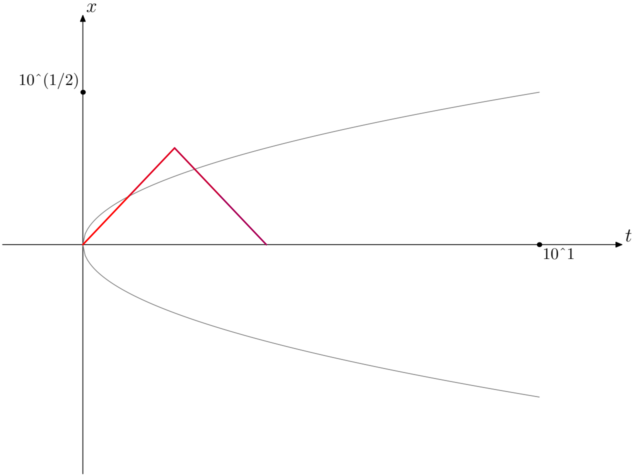
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



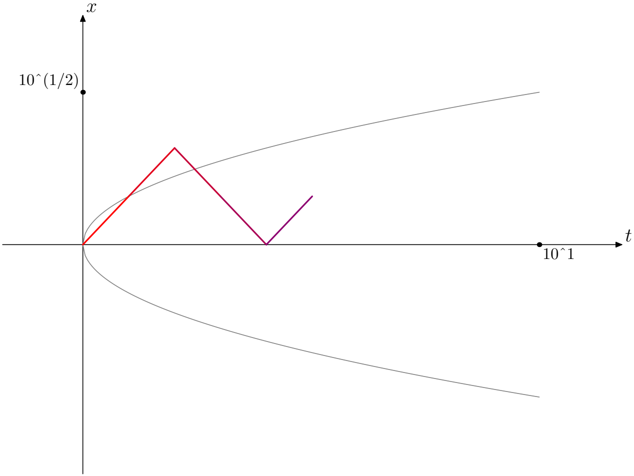
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



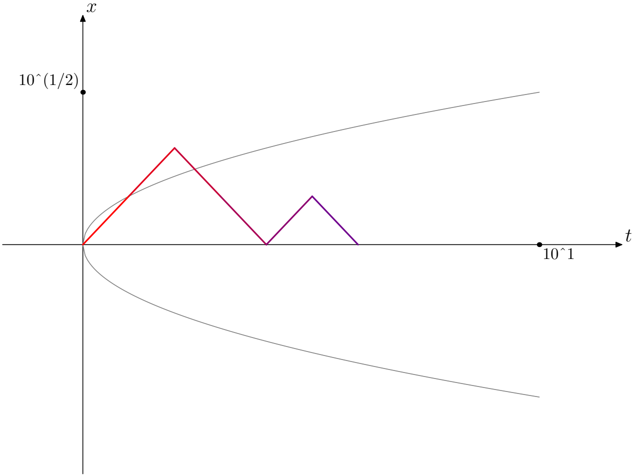
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



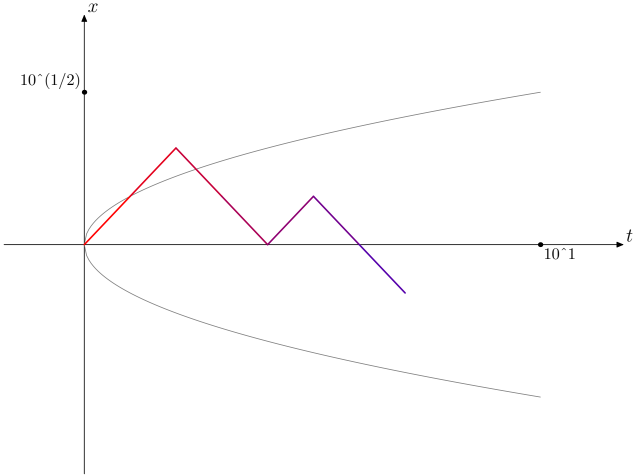
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



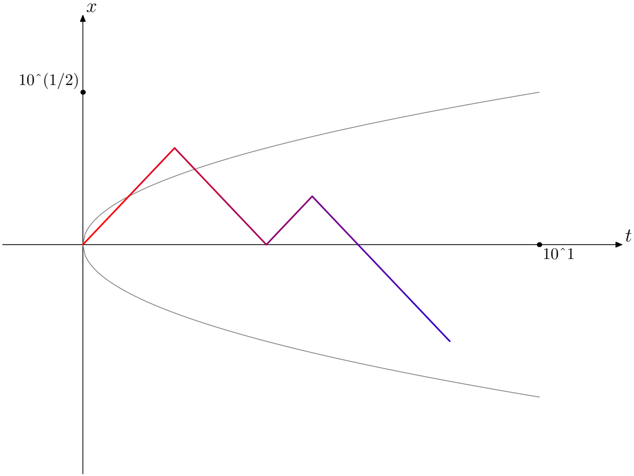
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



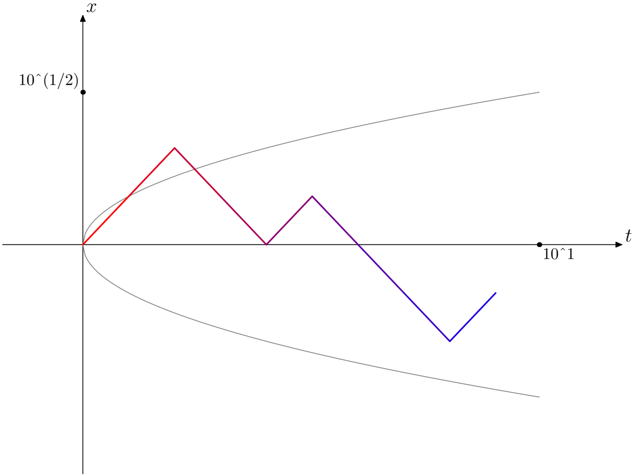
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



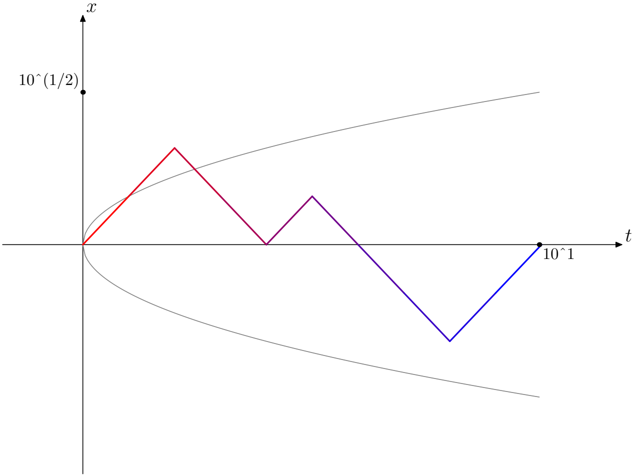
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



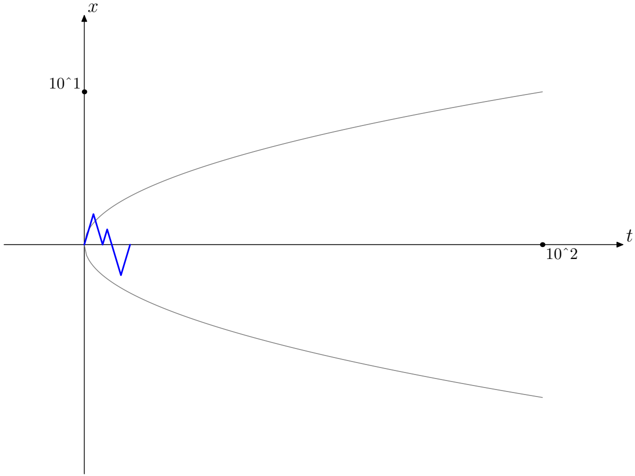
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



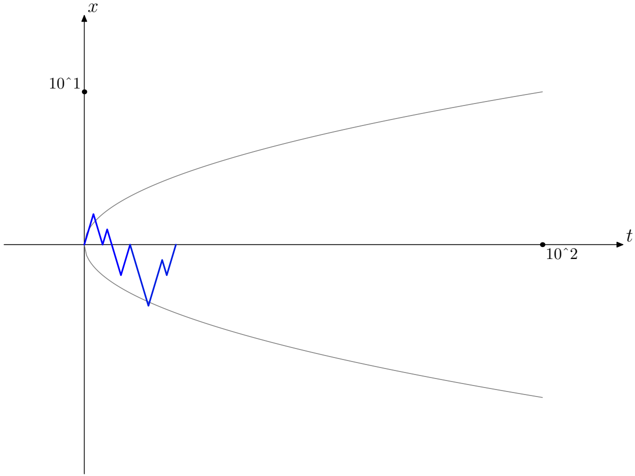
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



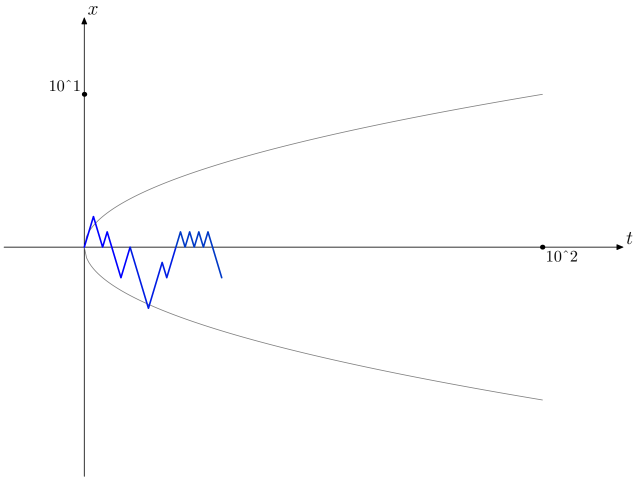
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



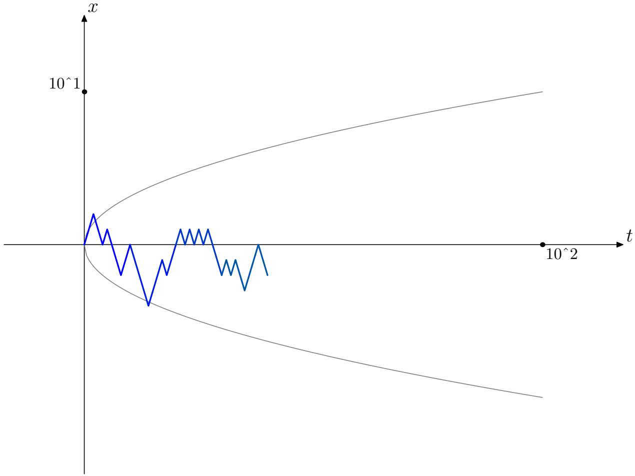
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



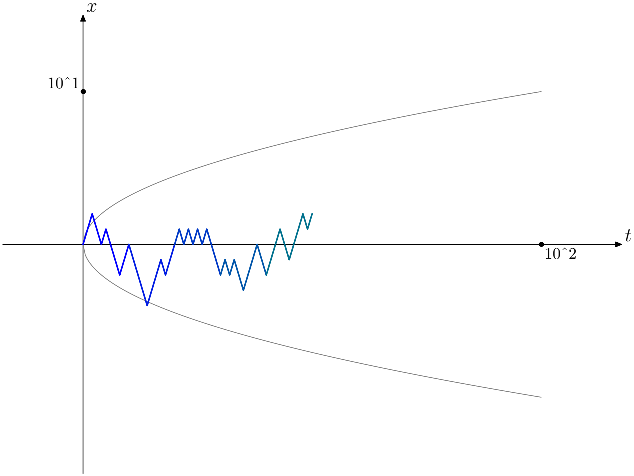
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



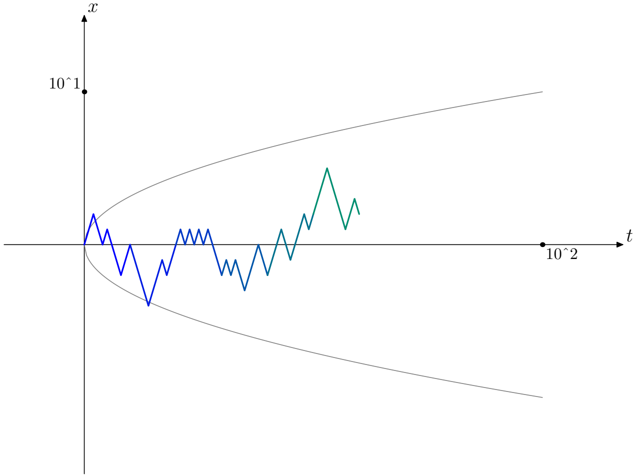
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



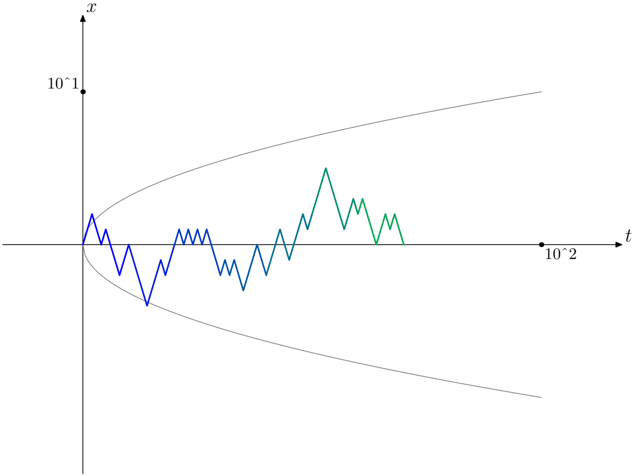
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



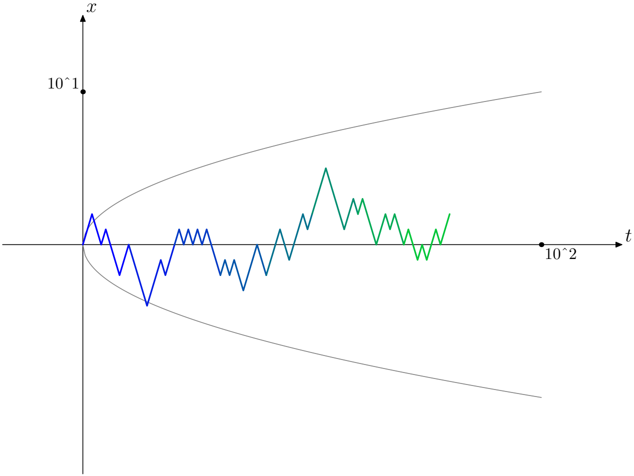
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



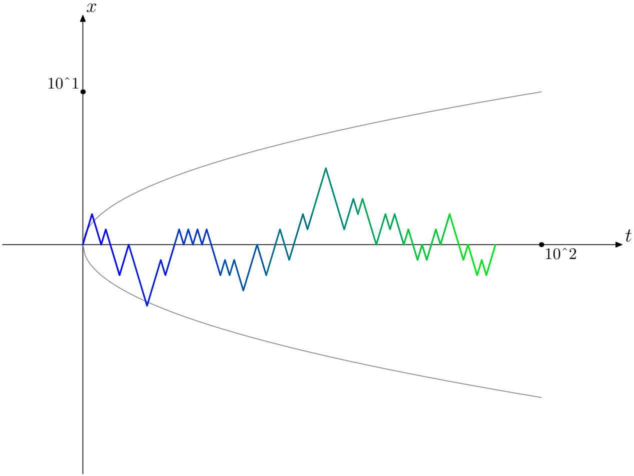
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



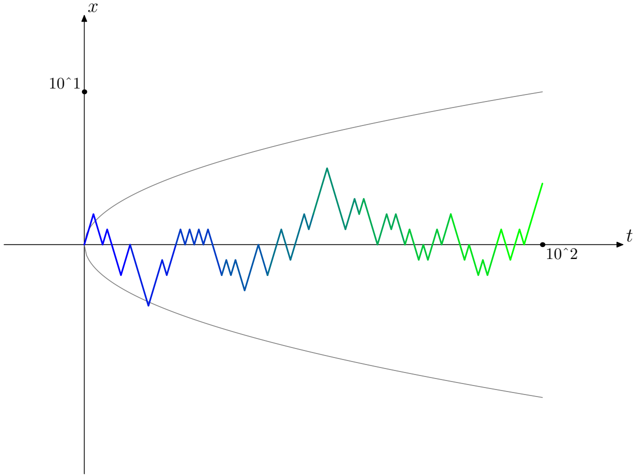
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



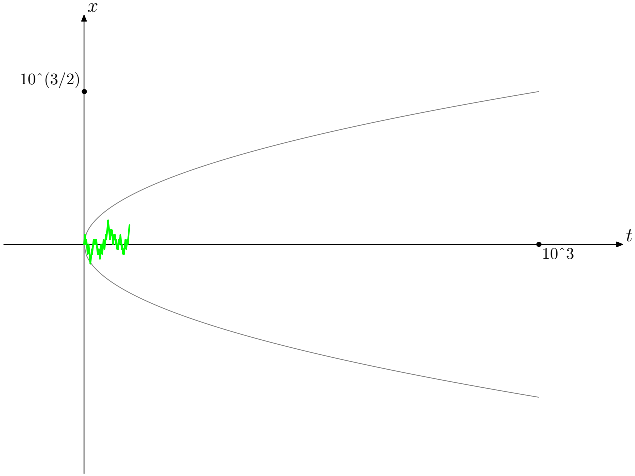
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



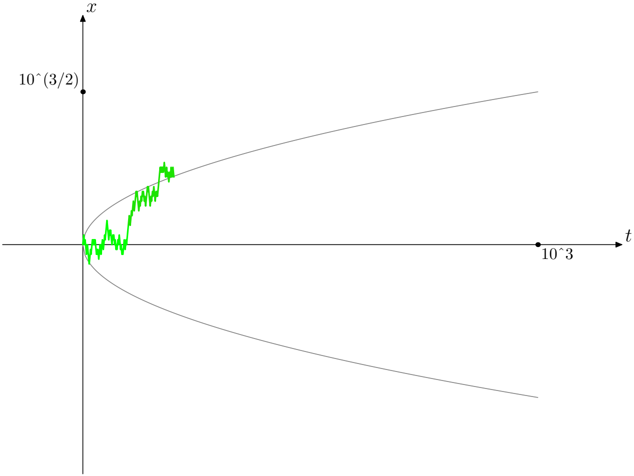
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



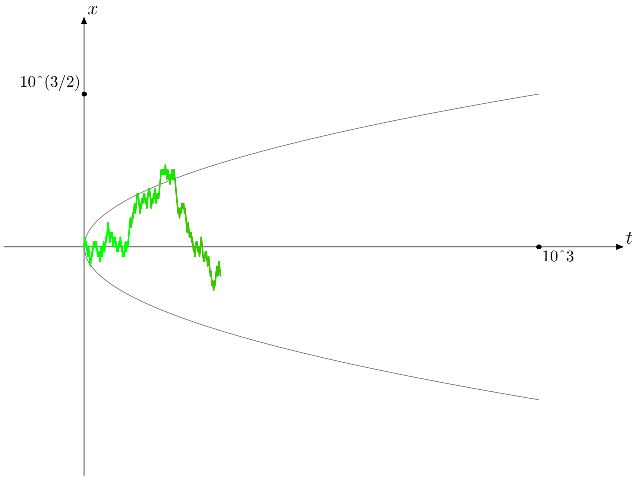
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



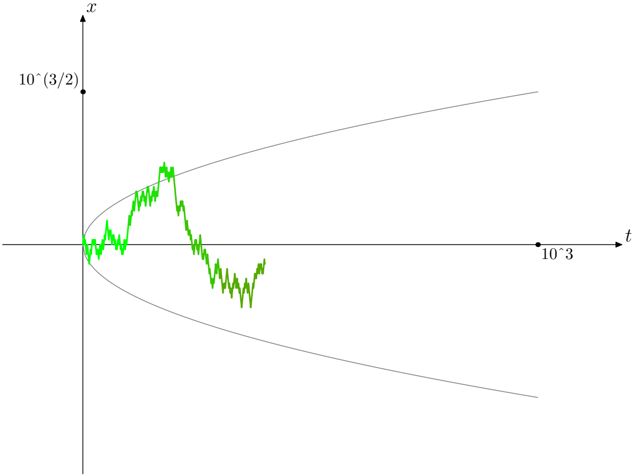
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



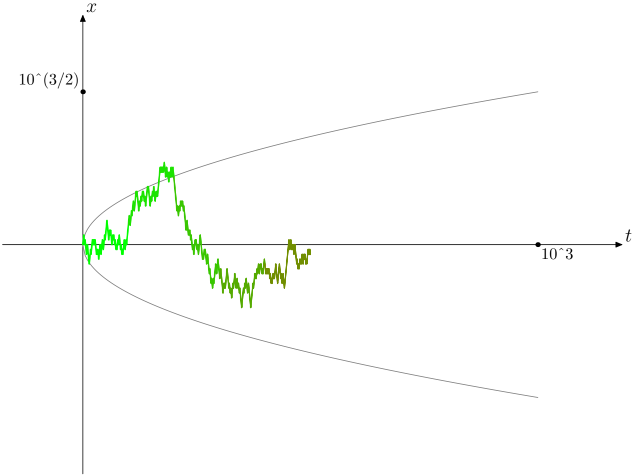
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



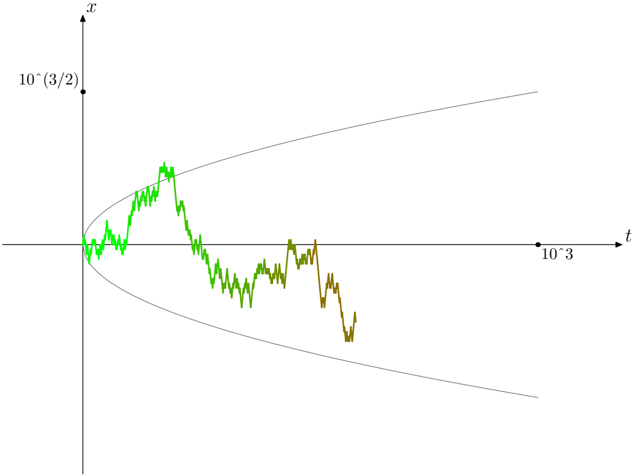
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



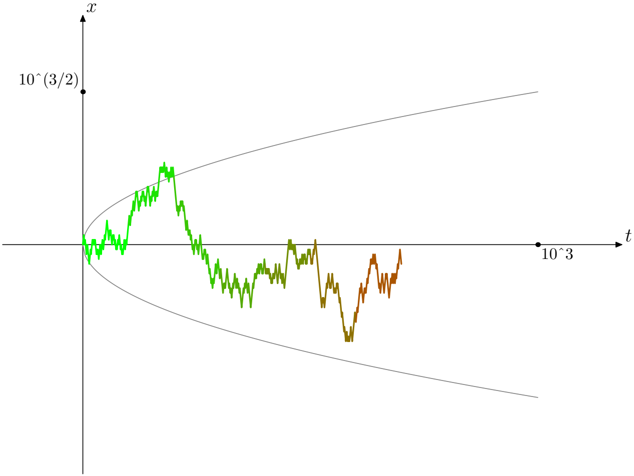
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



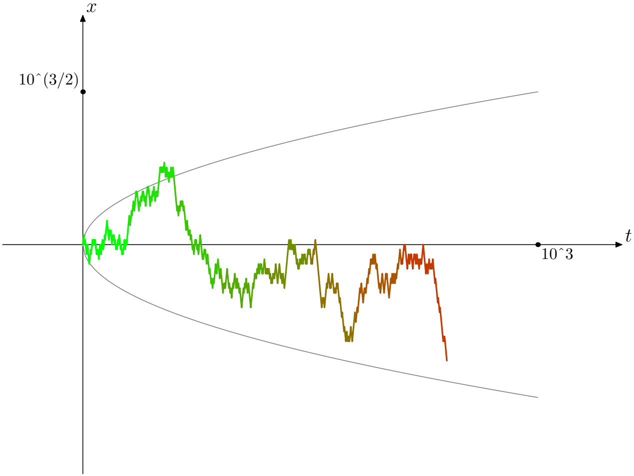
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



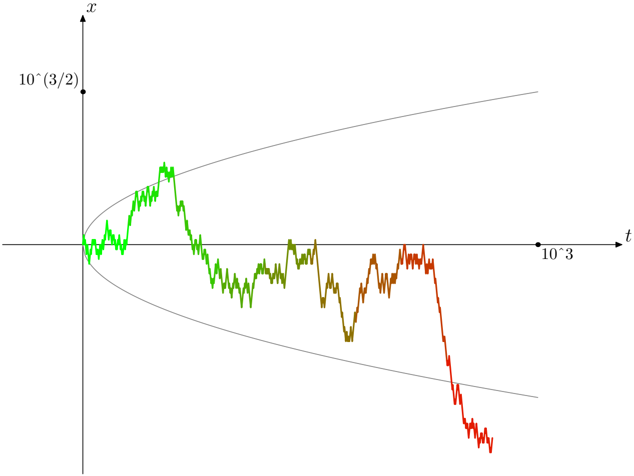
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



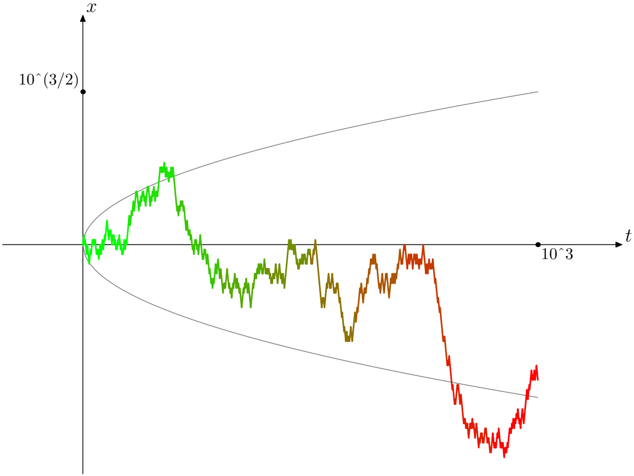
Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana



Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana

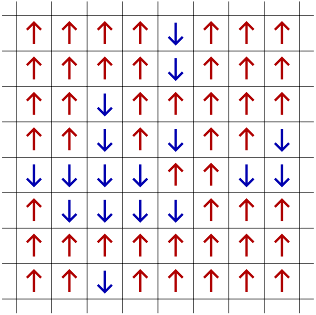


Esimerkki III: Brownin liike satunnaiskävelyn skaalausrajana

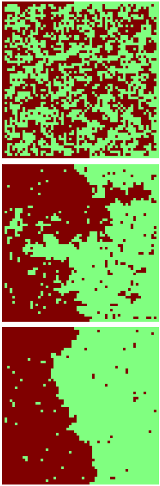


Esimerkki IV: Termodynaaminen raja vai skaalausraja

Termodynaaminen raja: $L \to \infty$



Skaalausraja: hilaväli $\to 0$

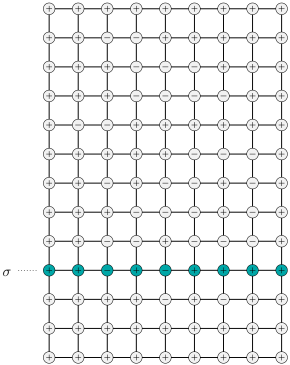


$x > \sqrt{2} - 1$

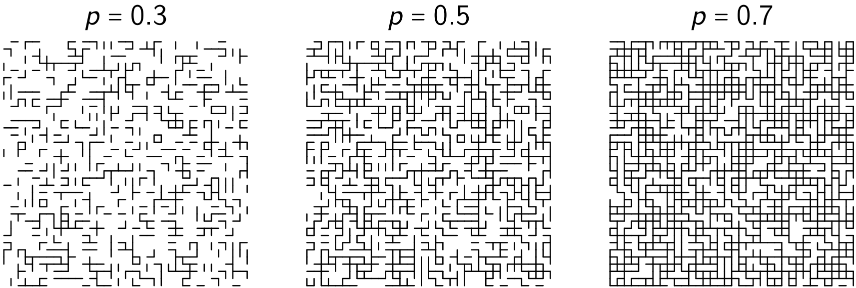
$x = \sqrt{2} - 1$

$x < \sqrt{2} - 1$

Esimerkki IV: 2D Ising-malli vapaiden fermioneiden avulla



Esimerkki V: Faasitransitio perkolaatiossa

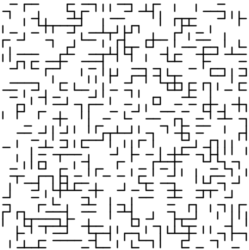


- *Perkolaatiotodennäköisyys*

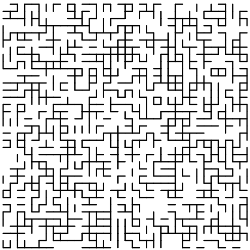
$$\theta(p) = P_p(\text{origo kuuluu äärettömän suureen } \textit{avoimeen klusteriin})$$
$$= P_p(\text{origosta alkaa äärettömän pitkä } \textit{avoin (yksinkertainen) polku})$$

Esimerkki V: Faasitransitio perkolaatiossa

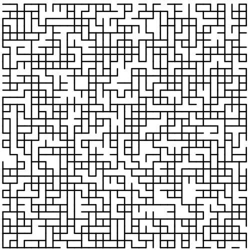
$p = 0.3$



$p = 0.5$



$p = 0.7$



- *Perkolaatiotodennäköisyys*

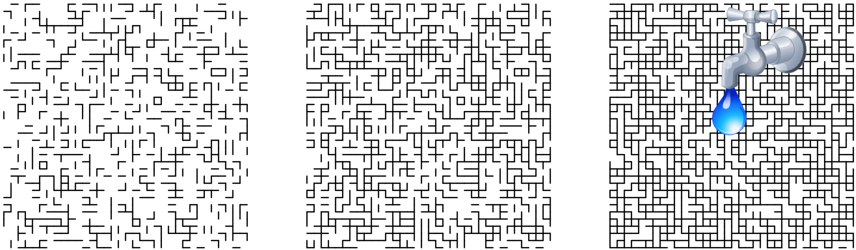
$$\begin{aligned}\theta(p) &= P_p(\text{origo kuuluu äärettömän suureen } \textit{avoimeen klusteriin})\\ &= P_p(\text{origosta alkaa äärettömän pitkä}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{avoin (yksinkertainen) polku})\end{aligned}$$

- Kriittinen parametri $0 \leq p_c \leq 1$:

$$\begin{cases}\theta(p) = 0, & p < p_c\\ \theta(p) > 0, & p > p_c\end{cases}$$

Esimerkki V: Faasitransitio perkolaatiossa

$p = 0.3$ $\qquad$ $p = 0.5$ $\qquad$ $p = 0.7$



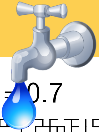
- *Perkolaatiotodennäköisyys*

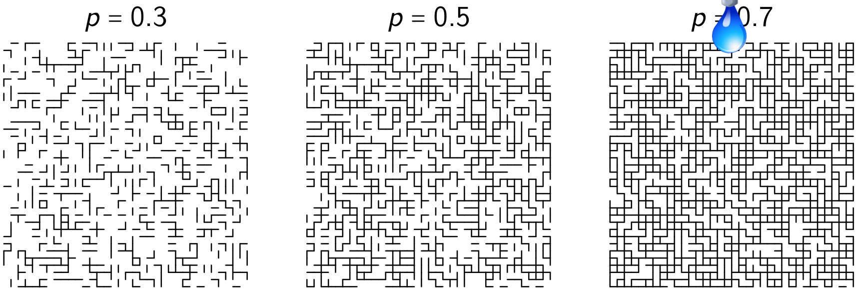
$$\begin{aligned}\theta(p) =& P_p(\text{origo kuuluu äärettömän suureen } \textit{avoimeen klusteriin})\\ =& P_p(\text{origosta alkaa äärettömän pitkä}\\ & \qquad\qquad \textit{avoin (yksinkertainen) polku})\end{aligned}$$

- Kriittinen parametri $0 \leq p_c \leq 1$:

$$\begin{cases}\theta(p) = 0, & p < p_c\\ \theta(p) > 0, & p > p_c\end{cases}$$

Esimerkki V: Faasitransitio perkolaatiossa





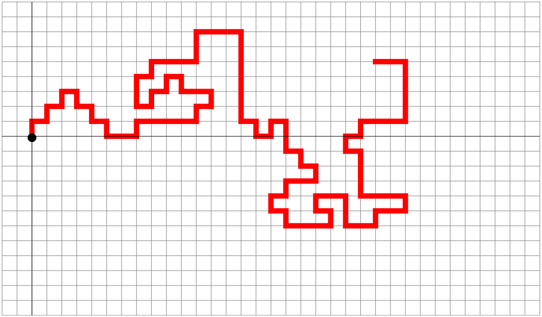
- *Perkolaatiotodennäköisyys*

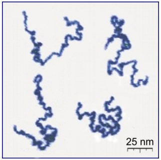
$$\theta(p) = P_p(\text{origo kuuluu äärettömän suureen } \textit{avoimeen klusteriin})$$
$$= P_p(\text{origosta alkaa äärettömän pitkä } \textit{avoin (yksinkertainen) polku})$$

- Kriittinen parametri $0 \le p_c \le 1$:

$$\begin{cases} \theta(p) = 0, & p < p_c \\ \theta(p) > 0, & p > p_c \end{cases}$$

Esimerkki VI: Markov-ketju Monte Carlo ja polymeeri

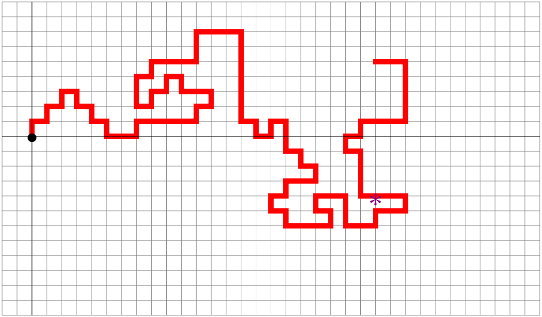


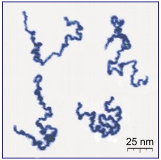


(polymeerejä)

- polymeerimalli: tasainen jakauma origosta alkavien N askeleen injektiivisten hilakävelyjen joukossa

Esimerkki VI: Markov-ketju Monte Carlo ja polymeeri

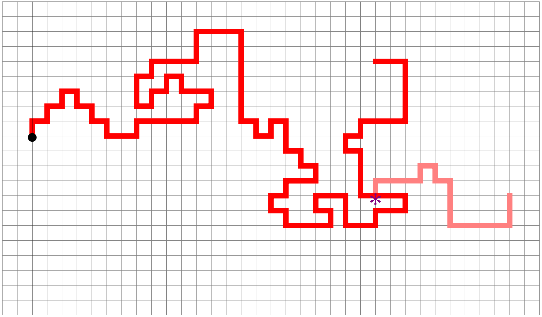


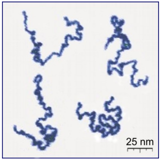


(polymeerejä)

- polymeerimalli: tasainen jakauma origosta alkavien N askeleen injektiivisten hilakävelyjen joukossa
- Monte Carlo Markov ketju
  - valitaan satunnainen taitoskohta
  - taitetaan loppuosaa satunnaisella hilasymmetrialla
  - jos saatu kävely ei injektiivinen, pidetään alkuperäinen

Esimerkki VI: Markov-ketju Monte Carlo ja polymeeri

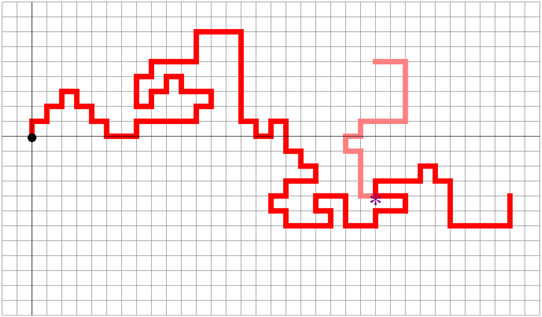


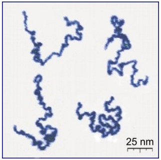


(polymeerejä)

- polymeerimalli: tasainen jakauma origosta alkavien N askeleen injektiivisten hilakävelyjen joukossa
- Monte Carlo Markov ketju
  - valitaan satunnainen taitoskohta
  - taitetaan loppuosaa satunnaisella hilasymmetrialla
  - jos saatu kävely ei injektiivinen, pidetään alkuperäinen

Esimerkki VI: Markov-ketju Monte Carlo ja polymeeri

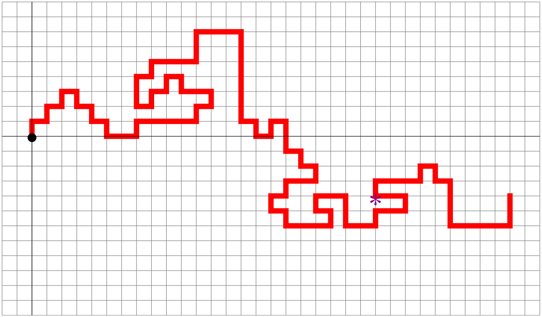


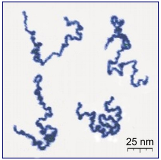


(polymeerejä)

- polymeerimalli: tasainen jakauma origosta alkavien N askeleen injektiivisten hilakävelyjen joukossa
- Monte Carlo Markov ketju
  - valitaan satunnainen taitoskohta
  - taitetaan loppuosaa satunnaisella hilasymmetrialla
  - jos saatu kävely ei injektiivinen, pidetään alkuperäinen

Esimerkki VI: Markov-ketju Monte Carlo ja polymeeri

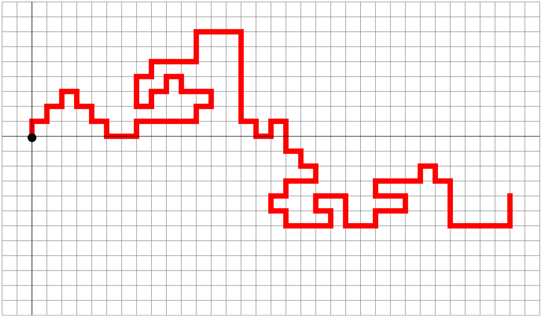


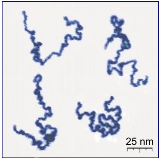


(polymeerejä)

- polymeerimalli: tasainen jakauma origosta alkavien N askeleen injektiivisten hilakävelyjen joukossa
- Monte Carlo Markov ketju
  - valitaan satunnainen taitoskohta
  - taitetaan loppuosaa satunnaisella hilasymmetrialla
  - jos saatu kävely ei injektiivinen, pidetään alkuperäinen

Esimerkki VI: Markov-ketju Monte Carlo ja polymeeri

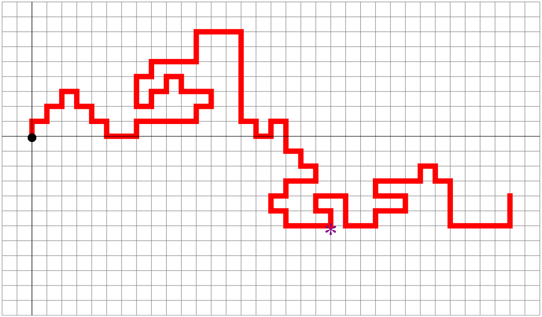


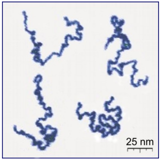


(polymeerejä)

- polymeerimalli: tasainen jakauma origosta alkavien N askeleen injektiivisten hilakävelyjen joukossa
- Monte Carlo Markov ketju
  - valitaan satunnainen taitoskohta
  - taitetaan loppuosaa satunnaisella hilasymmetrialla
  - jos saatu kävely ei injektiivinen, pidetään alkuperäinen

Esimerkki VI: Markov-ketju Monte Carlo ja polymeeri

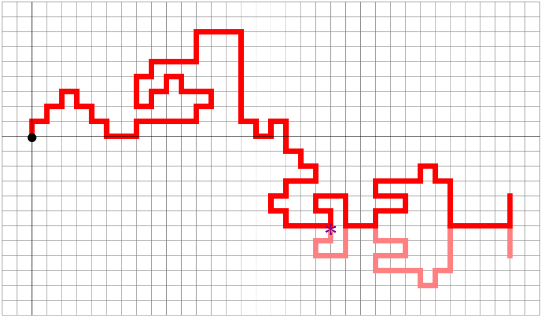


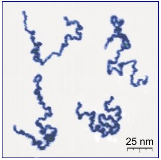


(polymeerejä)

- polymeerimalli: tasainen jakauma origosta alkavien N askeleen injektiivisten hilakävelyjen joukossa
- Monte Carlo Markov ketju
  - valitaan satunnainen taitoskohta
  - taitetaan loppuosaa satunnaisella hilasymmetrialla
  - jos saatu kävely ei injektiivinen, pidetään alkuperäinen

Esimerkki VI: Markov-ketju Monte Carlo ja polymeeri

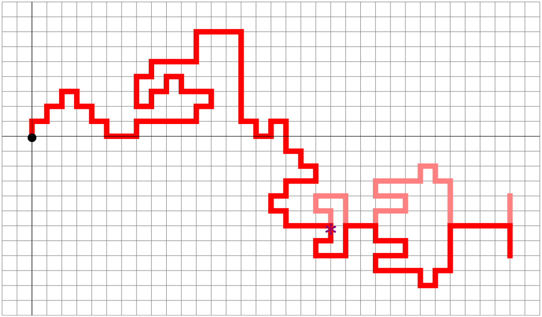


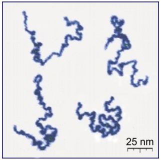


(polymeerejä)

- polymeerimalli: tasainen jakauma origosta alkavien N askeleen injektiivisten hilakävelyjen joukossa
- Monte Carlo Markov ketju
  - valitaan satunnainen taitoskohta
  - taitetaan loppuosaa satunnaisella hilasymmetrialla
  - jos saatu kävely ei injektiivinen, pidetään alkuperäinen

Esimerkki VI: Markov-ketju Monte Carlo ja polymeeri

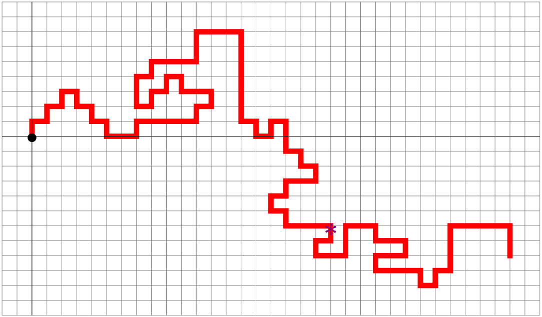


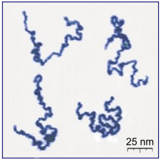


(polymeerejä)

- polymeerimalli: tasainen jakauma origosta alkavien N askeleen injektiivisten hilakävelyjen joukossa
- Monte Carlo Markov ketju
  - valitaan satunnainen taitoskohta
  - taitetaan loppuosaa satunnaisella hilasymmetrialla
  - jos saatu kävely ei injektiivinen, pidetään alkuperäinen

Esimerkki VI: Markov-ketju Monte Carlo ja polymeeri

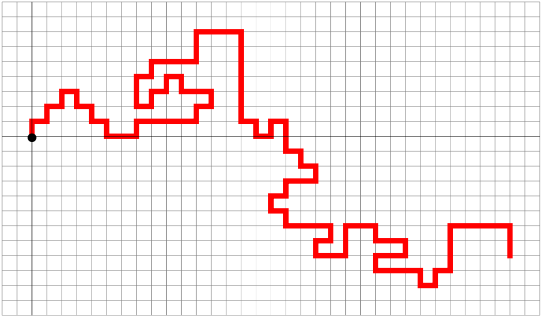


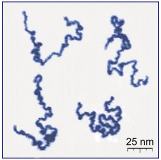


(polymeerejä)

- polymeerimalli: tasainen jakauma origosta alkavien N askeleen injektiivisten hilakävelyjen joukossa
- Monte Carlo Markov ketju
  - valitaan satunnainen taitoskohta
  - taitetaan loppuosaa satunnaisella hilasymmetrialla
  - jos saatu kävely ei injektiivinen, pidetään alkuperäinen

Esimerkki VI: Markov-ketju Monte Carlo ja polymeeri

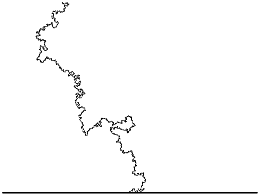


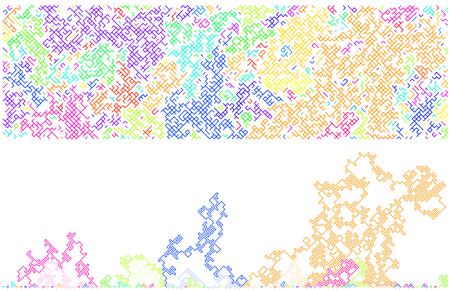


(polymeerejä)

- polymeerimalli: tasainen jakauma origosta alkavien N askeleen injektiivisten hilakävelyjen joukossa
- Monte Carlo Markov ketju
  - valitaan satunnainen taitoskohta
  - taitetaan loppuosaa satunnaisella hilasymmetrialla
  - jos saatu kävely ei injektiivinen, pidetään alkuperäinen

Esimerkki 7: viimeaikaisia tuloksia





2D kvanttigravitaatio:

`http://youtu.be/LZk_RJQmr9I`