Lause 3.7. Olkoon $b > 0$ kiinteä ja

$$v(x, U_0) = \int_0^{xU_0} \bar{F}(U_0 - \mu t)\, dt, \quad x \geq 0.$$

Lauseen 3.5 oletuksin

$$\lim_{U_0 \to \infty} \frac{\mathbb{P}(T \leq bU_0)}{v(b, U_0)} = 1$$

Todistus. Tarkastellaan ensin alarajoja. Olkoon $\delta > 0$ pieni. Jos $n \in [\delta U_0, bU_0]$ ja $\varepsilon > 0$ on pieni, niin

$$\mathbb{P}(T = n) \geq \mathbb{P}(\xi_n > U_0 - n\mu + n\varepsilon,\ Y_{n-1} > n(\mu - \varepsilon),\ T > n-1)$$

$$= \mathbb{P}(\xi_n > U_0 - n\mu + n\varepsilon,\ Y_{n-1} > n(\mu - \varepsilon))$$

$$- \mathbb{P}(\xi_n > U_0 - n\mu + n\varepsilon,\ Y_{n-1} > n(\mu - \varepsilon),\ T \leq n-1)$$

$$\geq \bar{F}(U_0 - n\mu + n\varepsilon)\, \mathbb{P}(Y_{n-1} > n(\mu - \varepsilon))$$

$$- \bar{F}(U_0 - n\mu + n\varepsilon)\, \mathbb{P}(T \leq bU_0).$$

Nyt

$$\mathbb{P}(Y_{n-1} > n(\mu - \varepsilon)) = 1 + o(1)$$

tasaisesti joukossa $n \geq \delta U_0$, kun $U_0 \to \infty$. Lauseen 3.1 nojalla

$$\mathbb{P}(T \le bU_0) \ge (1+o(1)) \sum_{n \in [\delta U_0, bU_0]} \bar{F}(U_0 - n\mu + n\varepsilon)$$

$$\ge (1+o(1)) \sum_{n \in [\delta U_0, bU_0]} \int_n^{n+1} \bar{F}(U_0 - t(\mu-\varepsilon))\,dt$$

$$= (1+o(1)) \int_{\lceil \delta U_0 \rceil}^{\lfloor bU_0 \rfloor} \bar{F}(U_0 - t(\mu-\varepsilon))\,dt.$$

Sijoituksella $v = t - \frac{\varepsilon t}{\mu}$ saadaan

$$\mathbb{P}(T \le bU_0) \ge (1+o(1)) \frac{\mu}{\mu-\varepsilon} \int_{\lceil \delta' U_0 \rceil}^{\lfloor b' U_0 \rfloor} \bar{F}(U_0 - \mu t)\,dt,$$

missä

$$\delta' = \frac{\delta(\mu-\varepsilon)}{\mu} \quad \text{ja} \quad b' = \frac{b(\mu-\varepsilon)}{\mu}.$$

Jos $c > 1$ ja $k \in \mathbb{N}$ ovat kiinteitä, niin

$$\bar{F}(cU_0) = \frac{\bar{F}(cU_0)}{\bar{F}((1-\varepsilon)cU_0)} \cdot \frac{\bar{F}((1-\varepsilon)cU_0)}{\bar{F}((1-\varepsilon)^2 cU_0)} \cdots \frac{\bar{F}((1-\varepsilon)^{k-1} cU_0)}{\bar{F}((1-\varepsilon)^k cU_0)} \cdot \bar{F}((1-\varepsilon)^k cU_0).$$

Oletuksen (3.18) nojalla on olemassa vakio $\mu > 0$, jolle

$$\bar{F}(cU_0) \geq \mu \bar{F}(U_0),$$

kun U_0 on suuri. Siispä

$$(3.18) \quad \int_{[\delta' U_0]}^{bU_0} \bar{F}(U_0 - t\mu)\,dt \geq (bU_0 - \delta' U_0)\,\mu\,\bar{F}(U_0),$$

kun μ on sopiva ja U_0 suuri. Toisaalta

$$\int_0^{[\delta' U_0]} \bar{F}(U_0 - t\mu)\,dt \leq [\delta' U_0]\,\bar{F}(U_0).$$

Koska $b' > b$, niin

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0) \geq (1+o(1))\frac{\mu}{\mu - \varepsilon}\int_0^{bU_b} \bar{F}(U_0 - t\mu)\,dt$$

$$- (1+o(1))\,[\delta' U_0]\,\bar{F}(U_0).$$

Arvion (3.18) nojalla δ' voidaan valita siten, että

$$[\delta' U_0]\,\bar{F}(U_0) \leq \varepsilon \int_0^{bU_0} \bar{F}(U_0 - t\mu)\,dt,$$

kun U_0 on suuri. Nähdään, että

$$\liminf_{U_0 \to \infty} \frac{\mathbb{P}(T \leq bU_0)}{V(b, U_0)} \geq 1.$$

Tarkastellaan nyt ylärajoja. Selvästi, $\forall \delta \in (0,1)$,

$$\mathbb{P}(\xi_i > U_0^{1-\delta},\ \xi_j > U_0^{1-\delta} \text{ jollain } i \neq j,\ i,j \leq bU_0)$$

$$\leq b^2 U_0^2\, \bar{F}(U_0^{1-\delta})^2.$$

Jos $\delta, \varepsilon > 0$ ovat pieniä, tämä on korkeintaan

$$U_0^{1-\alpha-\varepsilon},$$

kun U_0 on suuri. Lauseen 3.1 ja lemman 3.2 nojalla

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0)$$

$$= \mathbb{P}(T \leq bU_0,\ \xi_j > U_0^{1-\delta} \text{ tasan yhdellä } j \leq bU_0)$$

$$+ O(U_0^{1-\alpha-\varepsilon}).$$

Jos toisaalta $\varepsilon' \in (0,1)$, niin

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0,\ \xi_j \in (U_0^{1-\delta}, \varepsilon' U_0] \text{ tasan yhdellä } j \leq bU_0)$$

$$\leq bU_0\, \mathbb{P}(T((1-\varepsilon')U_0) \leq bU_0 - 1,\ \xi_j \leq U_0^{1-\delta},\ \forall j \leq bU_0 - 1).$$

Lemman 3.2 nojalla

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0)$$

$$= \mathbb{P}(T \leq bU_0,\ \xi_j > \varepsilon' U_0 \text{ tasan yhdellä } j \leq bU_0)$$

$$+ O(U_0^{1-\alpha-\varepsilon})$$

$$\leq \sum_{n \leq bU_0} \mathbb{P}(T \leq bU_0,\ \xi_n > \varepsilon' U_0) + O(U_0^{1-\alpha-\varepsilon}).$$

Selvästi

$$\mathbb{P}(T < n-1,\ \xi_n > \varepsilon' U_0) \leq \mathbb{P}(T \leq bU_0)\,\bar{F}(\varepsilon' U_0).$$

Olkoon ε' niin pieni, että $\mu + \varepsilon' < 0$. Silloin

$$\mathbb{P}\big(T \in [n, bU_0],\ \xi_n \in (\varepsilon' U_0, (1-\varepsilon')U_0 - n(\mu+\varepsilon')]\big)$$

$$\leq \mathbb{P}\Big(Y_{n-1} > \frac{\varepsilon' U_0}{2} + n(\mu+\varepsilon'),\ \xi_n > \varepsilon' U_0\Big)$$

$$+ \mathbb{P}\Big(\sup_{m \in (n, bU_0]} (Y_m - Y_n) > \frac{\varepsilon' U_0}{2},\ \xi_n > \varepsilon' U_0\Big)$$

$$\leq \mathbb{P}\Big(Y_{n-1} > \frac{\varepsilon' U_0}{2} + n(\mu+\varepsilon')\Big)\bar{F}(\varepsilon' U_0)$$

$$+ \mathbb{P}\Big(T\Big(\frac{\varepsilon' U_0}{2}\Big) \leq bU_0\Big)\bar{F}(\varepsilon' U_0).$$

Lauseista 3.1 ja 3.3 seuraa, että

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0,\ \xi_n > \varepsilon' U_0)$$

$$\leq F\big((1-\varepsilon')U_0 - n(\mu+\varepsilon')\big) + O\big(U_0^{1-2\alpha+\varepsilon/2}\big)$$

tasaisesti alueessa $n \leq bU_0$.

Samaan tapaan kuin alarajan todistuksessa nähdään, että

$$\mathbb{P}(T \le bU_0) \le \frac{\mu}{\mu+\varepsilon'} \int_{-\delta' U_0}^{b' U_0} \bar{F}(U_0 - t\mu)\,dt + O(U_0^{2-2\alpha+\varepsilon/2}),$$

missä $b' \to b$ ja $\delta' \to 0$, kun $\varepsilon' \to 0$. Vaadittu yläraja seuraa tästä. $\square$

3.3. Ylärajatuloksia

Pyritään johtamaan ei-asymptoottisia ylärajoja todennäköisyyksille $\mathbb{P}(Y_n > na)$ ja $\mathbb{P}(T \le b U_0)$.

Lause 3.8. Oletetaan, että lauseen 3.3 ehdot on täytetty. Oletetaan lisäksi, että $\mathbb{P}(\xi \ge 0) = 1$ ja että $\beta = \mathbb{E}(\xi^2) < \infty$. Olkoon $a > \mu$ ja

$$(3.20)\quad \phi_a(n) = \inf_{\delta \in (0,1)} \left\{ n\bar{F}(n^{1-\delta}) + e^{-n^{\delta}((1-\delta)(a-\mu)\log n - \beta)} \right\},$$

Silloin

$$(3.21)\quad \mathbb{P}(Y_n > na) \le \phi_a(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lisäksi

$$(3.22)\quad \lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \phi_a(n) = 1 - \alpha.$$

Raja-arvo (3.22) osoittaa, että lauseen yläraja on oikeaa suuruusluokkaa, kts. lause 3.3.

<u>Todistus.</u> Olkoon $h > 0$, $\delta \in (0,1)$ ja

$$\begin{cases} \xi_j' = \xi_j \mathbb{1}(\xi_j \le n^{1-\delta}), \\ Y_n' = \xi_1' + \dots + \xi_n' \end{cases}$$

kuten lemman 3.2 todistuksessa. Tällöin

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \le \mathbb{P}(Y_n > na, Y_n = Y_n') + n\bar{F}(n^{1-\delta})$$
$$\le \mathbb{P}(Y_n' > na) + n\bar{F}(n^{1-\delta}).$$

Olkoon ξ' samoin jakautunut kuin ξ_1'. Tšebyševin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{P}(Y_n' > na) \le e^{-nah}\, \mathbb{E}(e^{h\xi'})^n.$$

Lemman 3.1.1 nojalla

$$\mathbb{E}(e^{h\xi'}) \le \frac{e^{hn^{1-\delta}} - 1 - hn^{1-\delta}}{n^{2(1-\delta)}}\, \mathbb{E}((\xi')^2) + 1 + h\mathbb{E}(\xi')$$
$$\le \exp\left(\frac{e^{hn^{1-\delta}} - 1 - hn^{1-\delta}}{n^{2(1-\delta)}} \cdot \varsigma + h\mu \right).$$

Saadaan yläraja

$$\mathbb{P}(Y_n' > na) \leq \exp\left(-n\left(h(a-\mu) - \frac{e^{hn^{1-\delta}} - 1 - hn^{1-\delta}}{n^{2(1-\delta)}}\varrho\right)\right)$$

$$\leq \exp\left(-n\left(h(a-\mu) - \frac{e^{hn^{1-\delta}}\varrho}{n^{2(1-\delta)}}\right)\right).$$

Valitaan $h = \dfrac{(1-\delta)\log n}{n^{1-\delta}}$ ja saadaan

$$\mathbb{P}(Y_n' > na) \leq \exp\left(-n^{\delta}\left((1-\delta)(a-\mu)\log n - \varrho\right)\right).$$

Yläraja (3.21) seuraa saaduista tuloksista.
Raja-arvo (3.22) käsitellään harjoituksissa. $\square$

Tarkastellaan nyt todennäköisyyttä $\mathbb{P}(T \leq bU_0)$.

<u>Lemma 3.9.</u> Oletetaan, että lauseen 3.3 ehdot on täytetty. Oletetaan lisäksi, että $\mathbb{P}(\xi \geq -P) = 1$ eräälle $P > 0$ ja että $\mu < 0$. Olkoon $y > 0$ ja

$$\Psi(h) = -hP + (\mu + P)\frac{e^{h(y+P)} - 1}{y+P}, \quad h > 0.$$

Silloin on olemassa yksikäsitteinen sellainen $h = h(y) > 0$, että $\Psi(h(y)) = 0$.

<u>Todistus.</u> Suoraviivainen.

<u>Lause 3.10.</u> Lemman 3.9 oletuksin ja merkinnöin

$$\mathbb{P}(T \le b U_0) \le \inf_{\delta \in (0,1)} \{ b U_0 \bar{F}(U_0^{1-\delta}) + e^{-h(U_0^{1-\delta})U_0} \}.$$

<u>Todistus.</u> Olkoon $y = U_0^{1-\delta}$ ja

$$\xi' = \xi 1(\xi \le y), \qquad \xi_n' = \xi_n 1(\xi_n \le y), \; n = 1, 2, \ldots$$

ja $\xi'' = \xi' + P$. Tällöin $\xi'' \in [0, y+P]$. Lemman 3.1.1 nojalla

$$\mathbb{E}(e^{h\xi''}) \le e^{\frac{e^{h(y+P)}-1}{y+P} \mathbb{E}(\xi'')}.$$

Selvästi

$$\mathbb{E}(\xi'') = \mathbb{E}(\xi') + P \le \mu + P$$

ja

$$\mathbb{E}(e^{h\xi'}) \le e^{-hP + (\mu+P)\frac{e^{h(y+P)}-1}{y+P}}.$$

Olkoon

$$T' = \inf\{n \mid \xi_1' + \ldots + \xi_n' > U_0\}$$

ja $h = h(U_0^{1-\delta})$ kuten lemmassa 3.9. Tehdään ξ'-muuttujiin konjugaattimuunnos parametrilla h. Saadaan

$$\mathbb{P}(T' \le bU_0) = \mathbb{E}_h\left(e^{-h(\xi_1' + \dots + \xi_{T'}') + T'c(h)} 1(T' \le bU_0)\right),$$

missä $c(h) = \log \mathbb{E}(e^{h\xi'})$. Alkuosan nojalla $c(h) \le 0$, joten

$$\mathbb{P}(T' \le bU_0) \le e^{-hU_0}.$$

Selvästi

$$\mathbb{P}(T \le bU_0) \le bU_0 \bar{F}(U_0^{1-\delta}) + \mathbb{P}(T' \le bU_0),$$

josta lauseen tulos seuraa. $\square$

Esimerkki 3.1. Olkoon $\xi = X - p$, missä X on yhdistetty Poisson-muuttuja parametrilla (λ, S) ja p on vakio. Oletetaan, että $p > \mathbb{E}(X)$. Kirjoitetaan

$$X = Z_1 + \dots + Z_K,$$

missä siis K on Poisson-jakautunut ja $Z, Z_1, Z_2, \dots$ ovat riippumattomia S-jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan, että $\mathbb{P}(Z \geq 0) = 1$,

$$(3.26) \qquad \lim_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(Z > x) = -\alpha,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$, ja että

$$(3.27) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \limsup_{x \to \infty} \frac{\bar{S}(x(1-\varepsilon))}{\bar{S}(x)} = 1.$$

Olkoon $F(x) = \mathbb{P}(\xi \leq x)$ kuten aiemminkin. Osoitetaan, että

$$(3.28) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\bar{F}(x)}{\lambda \bar{S}(x)} = 1.$$

Nähdään, että

$$\lim_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log \bar{F}(x) = -\alpha$$

ja että (3.15) toteutuu.

Olkoon $N \in \mathbb{N}$ kiinteä. Selvästi

$$\mathbb{P}(\xi > x) \geq \sum_{n=1}^{N} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \mathbb{P}(Z_1 + \cdots + Z_n > x + p).$$

Nyt

$$\mathbb{P}(Z_1 + \cdots + Z_n > x + p)$$

$$\geq n \, \mathbb{P}(Z_1 > x + p, \; Z_2, \ldots, Z_n \leq x + p)$$

$$= (1 + o(1)) \, n \, \bar{S}(x + p), \quad x \to \infty.$$

Siispä

$$\mathbb{P}(\xi > x) \geq (1 + o(1)) \, \bar{S}(x + p) \sum_{n=1}^{N} n \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= (1 + o(1)) \, \bar{S}(x + p) \, \mathbb{E}(K \mathbf{1}(K \leq N)).$$

Saadaan

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(\xi > x)}{\lambda \bar{S}(x)} \geq \liminf_{x \to \infty} \left(\frac{\bar{S}(x + p)}{\bar{S}(x)} \cdot \frac{\mathbb{E}(K \mathbf{1}(K \leq N))}{\lambda} \right)$$

$$= \frac{\mathbb{E}(K \mathbf{1}(K \leq N))}{\lambda}.$$

Koska N on mielivaltainen, niin

(3.30) $$\liminf_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(\xi > x)}{\lambda \bar{S}(x)} \geq 1.$$

Olkoon nyt $n \in \mathbb{N}$, $n \in [1, \log x]$, mielivaltainen. Merkitään $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$. Silloin

$$\mathbb{P}(S_n > x) \le n\, \mathbb{P}(S_n > x,\ Z_1 > \tfrac{x}{n})$$

$$\le n\, \mathbb{P}(S_n > x,\ Z_1 > \tfrac{x}{\log x}).$$

Olkoon $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Silloin

$$\mathbb{P}(S_n > x,\ Z_1 \in (\tfrac{x}{\log x}, (1-\varepsilon)x])$$

$$\le \bar{S}(\tfrac{x}{\log x}) \cdot n\, \bar{S}(\tfrac{\varepsilon x}{\log x})$$

$$\le (\log x)\, \bar{S}(\tfrac{\varepsilon x}{\log x})^2 = O(x^{-2\alpha+\delta}), \quad x \to \infty.$$

Nähdään, että

$$\mathbb{P}(S_n > x) \le n\, \bar{S}((1-\varepsilon)x) + n\, O(x^{-2\alpha+\delta})$$

tasaisesti alueessa $n \le \log x$. Saadaan

$$\mathbb{P}(\xi > x,\ K \le \log x)$$

$$\le \sum_{n \le \log x} n\, \bar{S}((1-\varepsilon)x) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} + O((\log x)^2 x^{-2\alpha+\delta})$$

ja siis

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(\xi > x,\ K \le \log x)}{\lambda\, \bar{S}(x)}$$

$$\le \limsup_{x \to \infty} \frac{\bar{S}((1-\varepsilon)x)\ \mathbb{E}(K\, 1(K \le \log x))}{\lambda\, \bar{S}(x)}$$

$$= \limsup_{x \to \infty} \frac{\bar{S}((1-\varepsilon)x)}{\bar{S}(x)}.$$

Oletuksen (3.27) nojalla

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\xi > x,\ k \le \log x)}{\lambda \bar{S}(x)} \le 1.$$

Toisaalta kaikilla $s > 0$,

$$\mathbb{P}(k > \log x) \le e^{-s\log x}\, \mathbb{E}(e^{sk})$$

$$= e^{-s\log x + \lambda(e^s - 1)}.$$

Paras ylöraja saadaan valitsemalla

$$s = \log \frac{\log x}{\lambda},$$

josta

$$\mathbb{P}(k > \log x) \le e^{-(\log x)(\log\log x) + (\log\lambda)\log x + \log x - \lambda}$$

$$= e^{-(\log x)(\log\log x)(1 + o(1))}$$

$$= O(x^{-2\alpha}).$$

Raja-arvo (3.28) seuraa saaduista tuloksista.

Lauseen 3.5 tulos on

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \sim n\lambda\, \bar{S}(n(a-\mu)), \quad n \to \infty,$$

ja lauseen 3.7

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0) \sim \lambda \int_0^{bU_0} \bar{S}(U_0 - \mu t)\, dt, \quad U_0 \to \infty.$$

4. Sijoitusriskeistä

Olkoon $\{Y_n\}$ satunnaiskulku kuten aiemminkin,

$$Y_n = \xi_1 + \dots + \xi_n .$$

Tulkinnallisesti ξ_j kuvaa perusliikettä,

ξ_j = vuoden j korvaukset vähennettynä vuoden j vakuutusmaksuilla.

Oletetaan, että yhtiö sijoittaa varansa markkinoille. Olkoon U_0 alkupääoma ja U_n varallisuus vuoden n lopussa. Tarkastellaan mallia, jossa

$$(4.1) \qquad U_{n+1} = (1+r_{n+1})(U_n - \xi_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tällöin r_n on vuoden n sijoitustoiminnan tuottoaste, joka on stokastinen. Oletetaan jatkossa, että

$$(4.2) \qquad r_n > -1, \ \forall n, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Mallissa on tehty yksinkertaistus, jossa kaikki perusliikkeen tapahtumat on tiivistetty vuoden alkuun. Vararikkohetki mallissa on

$$(4.3) \qquad T = \inf\{n \mid U_n < 0\}.$$

4.1. Yleisiä näkökohtia

Toistamalla rekursiota (4.1) saadaan

$$\begin{aligned} U_n = \; & (1+r_n)\cdots(1+r_1)U_0 \\ & -(1+r_n)\cdots(1+r_1)\xi_1 \\ & -(1+r_n)\cdots(1+r_2)\xi_2 \\ & \cdots \\ & -(1+r_n)\xi_n . \end{aligned}$$

Merkitään

$$d_n = \frac{1}{1+r_n}, \quad n=1,2,\ldots \qquad \text{(diskonttaustekijä)}.$$

Oletuksen (4.2) nojalla

$$U_n < 0 \iff \frac{U_n}{(1+r_1)\cdots(1+r_n)} < 0$$

$$\iff \xi_1 + d_1\xi_2 + \cdots + d_1\cdots d_{n-1}\xi_n > U_0 .$$

Merkitään

(4.4) $\quad Y'_n = \sum_{j=1}^{n} d_1\cdots d_{j-1}\xi_j .$

Tällöin ilmeisesti

(4.5) $\quad T = \inf\{n \mid Y'_n > U_0\}$

ja kaikilla $N \in \mathbb{N}$,

(4.5.1) $\quad \{T \le N\} = \{\max(Y'_1,\ldots,Y'_N) > U_0\}.$

tuottoasteista $r_1, r_2, \ldots$ on luonnollista olettaa, että ne ovat keskimäärin positiivisia. Kuitenkin sallitaan myös sijoitustappiot eli tuottoasteet voivat olla negatiivisia. Oletetaan jatkossa, että

$$r_1, r_1, r_2, \ldots$$

ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja että ne ovat riippumattomia ξ-muuttujista. Olkoon vielä d samoin jakautunut kuin d_1 ja ξ samoin jakautunut kuin ξ_1. Trivialiteettien välttämiseksi oletetaan, että

$$\mathbb{P}(\xi > 0) > 0.$$

4.2. Kiinteän aikajänteen vararikkotodennäköisyydestä

Olkoon $N \in \mathbb{N}$ kiinteä. Tarkastellaan todennäköisyyttä

$$\mathbb{P}(T \le N)$$

edellä esitetyssä mallissa. Olkoon

$$\bar{Y}'_N = \max\{Y'_1, \dots, Y'_N\}.$$

Tuloksen (4.5.1) nojalla

$$\mathbb{P}(T \le N) = \mathbb{P}(\bar{Y}'_N > U_0).$$

Oletetaan seuraavassa, että raja-arvot

$$\lim_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) \doteq -\alpha_\xi$$

ja

$$\lim_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(d > x) \doteq -\alpha_d$$

ovat olemassa. Sallitaan ääritapaukset

$$\alpha_\xi, \alpha_d = 0 \text{ tai } \infty.$$

<u>Lause 4.1.</u> Edellä esitetyin oletuksin ja merkinnöin kaikilla $N \geq 2$,

$$\lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq N) = -\min(\alpha_\xi, \alpha_d).$$

<u>Todistus</u> Riskiteorian lemman 5.1 nojalla

$$\limsup_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x)$$

$$= -\sup\{ s \geq 0 \mid \mathbb{E}(\xi^s 1(\xi > 0)) < \infty \}.$$

Vastaava tulos pätee tietysti todennäköisyydelle $\mathbb{P}(d > x)$. Nähdään, että esimerkiksi

$$\alpha_\xi = \sup\{ s \geq 0 \mid \mathbb{E}(\xi^s 1(\xi > 0)) < \infty \}.$$

Tarkastellaan ensin tapausta, jossa $\alpha_\xi, \alpha_d > 1$. Olkoon $s \geq 1$. Tällöin

$$\mathbb{E}((\overline{\Psi}'_N)^s 1(\Psi'_N > 0))$$

$$\leq \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{j=1}^{N} d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j 1(\xi_j > 0)\Big)^s\Big)$$

$$\leq \Big(\sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}\big((d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j 1(\xi_j > 0))^s\big)^{\frac{1}{s}}\Big)^s,$$

Viimeinen yläraja seuraa Minkowskin epäyhtälöstä.

Nyt

$$\mathbb{E}\left(\left(d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j 1(\xi_j > 0)\right)^s\right)$$

$$= \mathbb{E}(d^s)^{j-1} \, \mathbb{E}(\xi^s 1(\xi > 0)).$$

Jos siis $s < \min(\alpha_\xi, \alpha_d)$, niin

$$\mathbb{E}\left((\bar{Y}'_N)^s 1(\bar{Y}'_N > 0)\right) < \infty$$

ja edelleen

$$\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{Y}'_N > U_0) \leq -s.$$

Antamalla $s \to \min(\alpha_\xi, \alpha_d)$ alhaalta saadaan

$$\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{Y}'_N > U_0) \leq -\min(\alpha_\xi, \alpha_d).$$

Toisaalta

$$\liminf_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{Y}'_N > U_0)$$

$$\geq \liminf_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi_1 > U_0) = -\alpha_\xi$$

ja jos $\varepsilon > 0$ on pieni,

$$\liminf_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{Y}'_N > U_0)$$

$$\geq \liminf_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi_1 > \varepsilon, \xi_2 > \varepsilon, d_1 > \tfrac{U_0}{\varepsilon})$$

$$= \liminf_{U_0 \to \infty} (\log U_0^{-1}) \log \mathbb{P}(d > \tfrac{U_0}{\varepsilon}) = -\alpha_d.$$

4.3.21.

Nähdään, että

$$\liminf_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(\tau \le N) \ge -\min(\alpha_\xi, \alpha_\delta).$$

Saadut tulokset todistavat lauseen tapauksessa $\min(\alpha_\xi, \alpha_\delta) \ge 1$.

Olkoon nyt $\min(\alpha_\xi, \alpha_\delta) < 1$. Yläraja-arvio todennäköisyydelle $\mathbb{P}(\tau \le N)$ saadaan käyttämällä Minkowskin epäyhtälön sijaan elementaarista arviota

$$(x+y)^s \le x^s + y^s, \quad x, y \ge 0, \quad s \in (0,1).$$

Alarajan todistus on sama kuin edellä. $\square$

Lauseen nojalla pahempi hännistä $\mathbb{P}(\xi > x)$, $\mathbb{P}(\delta > x)$ määrää vararikkotodennäköisyyden hännän vahvuuden (ainakin, jos $\min(\alpha_\xi, \alpha_\delta) < \infty$).

Lähde: Tang, Q., Tsitsiashvili, G. (2003) Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks, Stoch. Processes Appl. 108, p. 299-325.

4.3. Äärettömän aikajänteen vaarikkotodennäköisyydestä

Olkoon malli ja oletukset kuten kohdassa 4.1.
Merkitään

$$c(s) = \log \mathbb{E}(d^s) = \log \mathbb{E}(e^{s \log d}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Oletetaan, että $c(s) < 0$ jollain $s > 0$. Merkitään

$$(4.5.2) \quad \bar{Y}' = \sup\{Y_1', Y_2', \dots\}.$$

Lemma 4.1. Oletetaan edellä esitetyn lisäksi, että

$$(4.6) \qquad \mathbb{E}(|\xi|^s) < \infty$$

jollain $s > 0$. Silloin $\mathbb{P}(\bar{Y}' < \infty) = 1$ ja

$$(4.7) \qquad \mathbb{E}((\bar{Y}')^s \, 1(\bar{Y}' > 0)) < \infty$$

aina, kun $c(s) < 0$ ja $\mathbb{E}(|\xi|^s) < \infty$.

Todistus. Olkoon $s \in (0,1]$ sellainen, että

$$\mathbb{E}(|\xi|^s) < \infty \quad \text{ja} \quad c(s) < 0.$$

Merkitään

$$\bar{Y}'_n = \sup\{Y'_1, \dots, Y'_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Silloin

$$(4.9) \quad \bar{Y}'_n \, 1(\bar{Y}'_n > 0) \le \sum_{j=1}^{n} d_1 \cdots d_{j-1} |\xi_j|.$$

On helppo nähdä, että

$$(x+y)^s \le x^s + y^s, \quad \forall x, y \ge 0, \ s \in (0,1].$$

Siispä

$$\mathbb{E}((\bar{Y}'_n)^s 1(\bar{Y}_n > 0)) \le \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}((d_1 \cdots d_{j-1})^s |\xi_j|^s)$$

$$= \mathbb{E}(|\xi|^s) \sum_{j=1}^{n} e^{(j-1)c(s)}$$

$$\le \mathbb{E}(|\xi|^s) \frac{1}{1 - e^{c(s)}} < \infty.$$

Monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\mathbb{E}((\bar{Y}')^s 1(\bar{Y}' > 0))$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}((\bar{Y}'_n)^s 1(\bar{Y}'_n > 0))$$

$$\le \mathbb{E}(|\xi|^s) \frac{1}{1 - e^{c(s)}} < \infty.$$

Nähdään, että $\mathbb{P}(\bar{Y}' < \infty) = 1$. Samoin (4.7) on todistettu tapauksessa $s \in [0,1]$.

Olkoon nyt $s > 1$ sellainen, että (4.6) toteutuu ja $c(s) < 0$. Minkowskin epäyhtälön nojalla

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left((\bar{Y}'_n)^s \, 1(\bar{Y}'_n > 0) \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left((d_1 \cdots d_{j-1})^s \, |\xi_j|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \mathbb{E}(|\xi|^s)^{\frac{1}{s}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{(j-1)c(s)/s} \\
&= \mathbb{E}(|\xi|^s)^{\frac{1}{s}} \frac{1}{1 - e^{c(s)/s}} < \infty .
\end{aligned}
$$

Nähdään kuten todistuksen alkuosassa, että

$$\mathbb{E}\left((\bar{Y}')^s \, 1(\bar{Y}' > 0) \right) < \infty . \quad \square$$

Selvästi

$$\mathbb{P}(T<\infty) = \mathbb{P}(\bar{Y} > U_0).$$

Edellisestä lemmasta seuraa, että

$$\lim_{U_0 \to \infty} \mathbb{P}(T<\infty) = 0.$$

Kiinnostava satunnaismuuttuja sovellettavasta ja teoreettisesta näkökulmasta on myös Y'_∞,

$$Y'_\infty = \lim_{n\to\infty} Y'_n$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j .$$

Lemman 4.1 todistuksen nojalla viimeksi kirjoitettu sarja suppenee m.v., jos $\mathbb{E}(|\xi|^s) < \infty$ ja $c(s) < 0$ jollain $s > 0$.

<u>Lause 4.2.</u> Lemman 4.1 oletuksin

$$\mathbb{P}(T<\infty) \geq \mathbb{P}(Y'_\infty > U_0) \geq \mathbb{P}(T<\infty)\,\mathbb{P}(Y'_\infty > 0).$$

<u>Todistus.</u> Ensimmäinen epäyhtälö on ilmeinen. Toisaalta

$$\mathbb{P}(T=n, Y'_\infty > U_0)$$

$$\geq \mathbb{P}\Big(T=n, \sum_{m=n+1}^{\infty} d_1 \cdots d_{m-1} \xi_m > 0\Big)$$

$$= \mathbb{P}\Big(T=n, \sum_{m=n+1}^{\infty} d_{n+1} \cdots d_{m-1} \xi_m > 0\Big)$$

$$= \mathbb{P}(T=n)\,\mathbb{P}(Y'_\infty > 0).$$

4.7.

Så på

$$\mathbb{P}(Y'_\infty > U_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n, Y'_\infty > U_0)$$

$$\geq \mathbb{P}(Y'_\infty > 0) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n)$$

$$= \mathbb{P}(T < \infty)\, \mathbb{P}(Y'_\infty > 0). \quad \square$$

4.2. Summuskorkka-arvioita

Osoitetaan, että todennäköisyydet $\mathbb{P}(T < \infty)$ ja $\mathbb{P}(Y'_\infty > U_0)$ ovat asymptoottisesti summuskorkeaan U_0:in potensseja.

<u>Lause 4.3.</u> Oletetaan, että on olemassa yksikäsitteinen $R' \in (0, \infty)$ siten, että $C(R') = 0$. Oletetaan lisäksi, että $\mathbb{P}(\xi > 0) > 0$, ja että

$$E(|\xi|^s) < \infty \quad \text{ja} \quad c(s) < \infty$$

eräälle $s \in (R, \infty)$. Silloin

$$(4.12) \qquad \lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = -R'$$

ja

$$(4.13) \qquad \lim (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(Y'_\infty > U_0) = -R'.$$

<u>Huomautus 4.1.</u> Raja-arvo (4.12) riippuu vain d-muuttujista. Oleellinen ero verrattuna klassiseen malliin (jossa $d = 1$ ja ξ-muuttujat ovat kevythäntäisiä) on myös se, että vararikkotodennäköisyyden summuskorkka on $U_0^{-R'}$. Tämä on asymptoottisesti suurempi kuin klassinen e^{-RU_0}. Tässä mielessä sijoitusriskit ovat dominoivia. Jos ξ-muuttujat ovat paksuhäntäisiä, ovat vakuutus- ja sijoitusriskit lähempänä toisiaan.

<u>Lauseen 4.3 todistus.</u> Todistetaan ensin (4.12). Olkoon $s \in (0, R')$. Lemman 4.1 ja Tsebysevin epäyhtälön nojalla

$$\infty > \mathbb{E}\big((\bar{Y}')^s \, 1(\bar{Y}' > 0) \big)$$

$$\geq \mathbb{E}\big((\bar{Y}')^s \, 1(\bar{Y}' > U_0) \big)$$

$$\geq U_0^s \, \mathbb{P}(\bar{Y}' > U_0) = U_0^s \, \mathbb{P}(T < \infty).$$

Siispä

$$\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \leq -s$$

ja edelleen

$$\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \leq -R'.$$

On todistettava vielä, että

(4.15) $\liminf_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \geq -R'$.

Olkoon $u > 0$ ja

$\tau = \tau(u) = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid \log d_1 + \dots + \log d_m > u\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Olkoon edelleen

$\mu = \frac{1}{c'(R')}$, $\delta \in (0, \mu)$, $\delta' \in (0,1)$.

klassisesta varausteoriasta seuraa, että kun δ' on riittävän pieni, niin

(4.16) $\limsup_{u \to \infty} u^{-1} \log \mathbb{P}(\tau((1-\delta')u) \leq (\mu-\delta)u) < -R'$

ja

(4.17) $\liminf_{u \to \infty} u^{-1} \log \mathbb{P}(\tau(u) \in ((\mu-\delta)u, (\mu+\delta)u)) = -R'$.

Olkoon $\varkappa > 0$ sellainen, että $\mathbb{P}(\xi > \varkappa) > 0$ ja $\varepsilon, \delta'' > 0$. Silloin

$$(4.20)\quad \liminf_{n\to\infty} n^{-1}\log \mathbb{P}(\xi_i > -e^{\delta'' n}, \forall\, i \le \lceil(\mu-\delta)n\rceil,$$

$$\xi_{\lceil(\mu-\delta)n\rceil+1} > \varkappa, \dots, \xi_{\lceil(\mu+\delta)n\rceil} > \varkappa\,)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} n^{-1}\log \underbrace{\mathbb{P}(\xi > -e^{\delta'' n})}_{> 1-\varepsilon,\ \text{kun } n \text{ suuri}}{}^{\lceil(\mu-\delta)n\rceil}\ \mathbb{P}(\xi > \varkappa)^{2\delta n + 2}$$

$$\ge (\mu-\delta)\log(1-\varepsilon) + 2\delta \log \mathbb{P}(\xi > \varkappa).$$

Alaraja koska saadaan annettu $-\varepsilon'$, $\varepsilon' > 0$. Olkoon

$$H_n = \{\tau((1-\delta')n) > (\mu-\delta)n\}$$

$$\cap \{\tau(n) \in ((\mu-\delta)n, (\mu+\delta)n)\}$$

$$\cap \{\xi_i > -e^{\delta'' n}, \forall\, i \le \lceil(\mu-\delta)n\rceil\}$$

$$\cap \{\xi_{\lceil(\mu-\delta)n\rceil+1} > \varkappa, \dots, \xi_{\lceil(\mu+\delta)n\rceil} > \varkappa\},$$

missä $\delta, \delta', \delta''$ ovat sellaisia, että edellä saadut arviot pätevät. Lisäksi voidaan olettaa $\delta'' < \delta'$.

Jos $n \in \mathbb{N}$ on kiinteä ja $\omega \in H_n$, niin

$$\max\{Y'_m \mid \lceil(\mu-\delta)n\rceil+1 \le m \le \lceil(\mu+\delta)n\rceil\}$$

$$= Y'_{\lceil(\mu-\delta)n\rceil} + \max\{Y'_m - Y'_{\lceil(\mu-\delta)n\rceil} \mid \lceil(\mu-\delta)n\rceil+1 \le m \le \lceil(\mu+\delta)n\rceil\}$$

$$\ge -e^{\delta'' n} - \lceil(\mu-\delta)n\rceil e^{\delta'' n} \max\{e^{\log d_1 + \dots + \log d_m} \mid 1 \le m \le \lceil(\mu-\delta)n\rceil - 1\}$$

$$+ \gamma e \max(e^{\log d_1 + \dots + \log d_m} \mid \lceil(\mu-\delta)n\rceil \le m \le \lceil(\mu+\delta)n\rceil - 1|)$$

$$\ge -e^{\delta'' n} - \lceil(\mu-\delta)n\rceil e^{\delta'' n} e^{(1-\delta')n} + \gamma e^n.$$

Kun n on riittävän suuri, on siis, $\forall \omega \in H_n$,

$$\max\{Y'_m \mid \lceil(\mu-\delta)n\rceil+1 \le m \le \lceil(\mu+\delta)n\rceil\} \ge e^{(1-\varepsilon)n}.$$

Olkoon $\bar{Y}'$ kuten (4.5.2):ssa. Silloin

$$H_{\lceil\log U_0\rceil} \subseteq \{\bar{Y}' > e^{(1-\varepsilon)\lceil\log U_0\rceil}\}$$

$$\subseteq \{\bar{Y}' > U_0^{1-\varepsilon}\} = \{T(U_0^{1-\varepsilon}) < \infty\},$$

kun U_0 on suuri.

Arvioiden (4.16), (4.17) ja (4.20) nojalla

$$\liminf_{U_0 \to \infty} \lceil\log U_0\rceil^{-1} \log \mathbb{P}(T(U_0^{1-\varepsilon}) < \infty) \ge -R' - \varepsilon',$$

joten

$$\liminf_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T(U_0) < \infty) \ge -\frac{R' + \varepsilon'}{1-\varepsilon}.$$

Alaraja (4.15) saadaan antamalla $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon' \to 0$.

Raja-arvon (4.13) todistamiseksi on lauseen 4.2 nojalla riittävää näyttää, että $\mathbb{P}(Y'_\infty > 0) > 0$.

Olkoot $M > 0$ ja $\gamma > 0$ sellaisia, että

$$\mathbb{P}(Y'_\infty > -M) > 0 \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}(\xi > \gamma) > 0.$$

Silloin

$$\mathbb{P}(Y'_\infty > -M + \gamma) \geq \mathbb{P}(\xi_1 > \gamma,\ Y'_\infty - \xi_1 > -M)$$

$$= \mathbb{P}(\xi_1 > \gamma)\, \mathbb{P}\Big(\sum_{j=2}^{\infty} d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j > -M \Big).$$

Nyt

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=2}^{\infty} d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j > -M \Big)$$
$$\geq \mathbb{P}\Big(d_1 \leq 1,\ \sum_{j=2}^{\infty} d_2 \cdots d_{j-1} \xi_j > -M \Big)$$
$$= \mathbb{P}(d_1 \leq 1)\, \mathbb{P}(Y'_\infty > -M) > 0,$$

sillä oletuksen $R > 0$ nojalla $\mathbb{P}(d_1 \leq 1) > 0$. Nähdään, että

$$\mathbb{P}(Y'_\infty > -M + \gamma) > 0.$$

Toistamalla päättelyä saadaan vaadittu tulos. $\square$

4.4. Inflaation vaikutus vararikkoriskiin

Edellä oletettiin, että perusliikettä kuvaavat satunnaismuuttujat ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Inflaatio tyypillisesti aiheuttaa riippuvuutta ja epä-stationaarisuutta.

Korvataan nyt ξ_n muuttujalla ξ_n',

$$\xi_n' = (1+i_1)\cdots(1+i_{n-1})\,\xi_n, \quad n=1,2,\ldots,$$

missä $i_1, i_2, \ldots$ kuvaavat inflaatioasteita. Oletetaan, että nämä ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja riippumattomia muuttujista $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Lisäksi oletetaan, että $\mathbb{P}(i_1 > -1) = 1$.

Kohdassa 4.1 esitetty rekursiivinen päättely antaa nyt

$$
\begin{aligned}
U_n = {} & (1+r_n)\cdots(1+r_1)U_0 \\
& - (1+r_n)\cdots(1+r_1)\,\xi_1 \\
& - (1+r_n)\cdots(1+r_2)(1+i_1)\,\xi_2 \\
& \cdots \\
& - (1+r_n)(1+i_1)\cdots(1+i_{n-1})\,\xi_n .
\end{aligned}
$$

Edelleen

$$U_n < 0 \iff \xi_1 + \frac{1+i_1}{1+r_1}\xi_2 + \dots + \frac{(1+i_1)\cdots(1+i_{n-1})}{(1+r_1)\cdots(1+r_{n-1})}\xi_n > U_0.$$

Edellä esitetty teoria siis pätee, kun diskonttaustekijä d korvataan muuntujalla

$$d' = \frac{1+i}{1+r},$$

missä i on samoin jakautunut kuin i_1.

Karkeasti ilmaistuna aiemmin saadut tulokset pätevät, kunhan sijoitustuotot riittävät kompensoimaan inflaation. Tarkemmin, on oletettava, että

$$\mathbb{E}(\log d') < 0 ,$$

jotta parametri R' olisi positiivinen. Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{E}((d')^s) \geq e^{s\,\mathbb{E}(\log d')}.$$

Riittävää on siis esimerkiksi se, että $\mathbb{E}(d') < 1$.

4.5. Tarkennetut estimaatit

Esitetään seuraavassa todennäköisyyksien $\mathbb{P}(T<\infty)$ ja $\mathbb{P}(\bar{Y}'_\infty > u_0)$ asymptoottinen muoto pääosin ilman perusteluja. Oletetaan, että lauseen 4.3 ehdot on täytetty.

Mielivaltaiselle $u \in \mathbb{R}$ kirjoitetaan

$$\mathbb{P}(T(e^u) < \infty) = \mathbb{P}(\bar{Y}' > e^u)$$

$$= \mathbb{P}(\bar{Y}' > e^u) - \mathbb{P}(\bar{Y} - \xi_1 > e^u) + \mathbb{P}(\bar{Y} - \xi_1 > e^u).$$

Nyt

$$\bar{Y}' = \sup\{\xi_1, \xi_1 + d_1 \xi_2, \xi_1 + d_1 \xi_2 + d_1 d_2 \xi_3, \dots\}$$

$$= \xi_1 + d_1 \sup\{0, \xi_2, \xi_2 + d_2 \xi_3, \xi_2 + d_2 \xi_3 + d_2 d_3 \xi_4, \dots\}$$

$$=_L \xi_1 + d_1 \max(0, \bar{Y}'),$$

missä oikealla puolella $\xi_1, d_1 \perp\!\!\!\perp \bar{Y}'$ ($=_L$ tarkoittaa, että jakaumat ovat samat). Toisin sanoen $\bar{Y}'$ toteuttaa satunnaisyhtälön (random equation)

$$\bar{Y}' =_L \xi + d \max(0, \bar{Y}'),$$

ξ ja d riippumattomia $\bar{Y}'$:stä oikealla puolella.

Nähdään, että

$$\mathbb{P}(\bar{Y}' - \xi_1 > e^u) = \mathbb{P}(d\bar{Y}' > e^u)$$

$$= \mathbb{P}(\bar{Y}' > e^{u - \log d})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(\bar{Y}' > e^{u-x})\, dG(x),$$

missä

$$G(x) = \mathbb{P}(\log d \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Merkitään

$$Z(u) = \mathbb{P}(T(e^u) < \infty)$$

ja

$$z(u) = \mathbb{P}(\bar{Y}' > e^u) - \mathbb{P}(\bar{Y}' - \xi_1 > e^u).$$

Edellä esitetyn nojalla Z toteuttaa uusiutumisyhtälön

$$Z(u) = z(u) + \int_{-\infty}^{\infty} Z(u-x)\, dG(x).$$

Aiemmin esitettyä uusiutumislausetta ei voida soveltaa suoraan, koska $\log d$ ei ole positiivinen satunnaismuuttuja. Ongelmia aiheuttaa myös se, että z ei ole tunnettu funktio.

Formaalisti Cramér-Lundbergin approksimaation todistusta mukaillen kirjoitetaan ensin

$$e^{R'u} Z(u) = e^{R'u} z(u) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{R'(u-x)} Z(u-x)\, dG_{R'}(x),$$

missä $G_{R'}$ on G:n konjugaattijakauma parametrilla R'. Olkoon

$$Z'(u) = e^{R'u} Z(u).$$

Nähdään, että $Z'(u)$ toteuttaa erään uusiutumisyhtälön. Tehty muuttujanvaihto voisi johtaa ei-degeneroituneeseen raja-arvoon,

$$\lim_{u \to \infty} e^{R'u} Z(u) = C',$$

missä C' on positiivinen vakio. Tällöin

$$\mathbb{P}(T(U_0) < \infty) = Z(\log U_0)$$

$$\sim C' e^{-R' \log U_0} = C' U_0^{-R'}.$$

Tulos on todistettu lauseen 4.3 oletuksin, kts.

Goldie, C.M. (1991) Implicit renewal theory and tails of random equations. Ann. Appl. Prob. 1, 126-166.

Vastaava tulos pätee raja-arvolle Y'_∞. Ainoastaan vakio C' muuttuu.

Sisällysluettelo