3. Paksuhäntäisen satunnaiskulun vararikkoteoriaa

Olkoon $\{Y_n\}$ ja T kuten kohdassa 2. Oletetaan nyt, että $\mu = \mathbb{E}(\xi) \in (-\infty, 0)$ ja että on olemassa raja-arvo

$$(3.1) \quad \lim_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) = -\alpha,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$. Epätäsmällisesti, pätee

$$\mathbb{P}(\xi > x) \approx x^{-\alpha}, \quad x \text{ suuri.}$$

Täsmällisemmin, jos $\varepsilon > 0$ on annettu, niin

$$x^{-(\alpha+\varepsilon)} \leq \mathbb{P}(\xi > x) \leq x^{-(\alpha-\varepsilon)},$$

kun x on suuri. Olkoon $s > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $x_\varepsilon > 0$, että

$$\mathbb{E}(e^{s\xi}) \geq \mathbb{E}(e^{s\xi} 1(\xi \geq x)) \geq e^{sx}\, \mathbb{P}(\xi \geq x)$$

$$\geq e^{sx}\, x^{-(\alpha-\varepsilon)} \geq \frac{(sx)^n}{n!}\, x^{-(\alpha+\varepsilon)}, \quad \forall n,\ x > x_\varepsilon$$

Valitsemalla $n > \alpha + \varepsilon$ nähdään, että

$$\mathbb{E}(e^{s\xi}) = \infty, \quad \forall s > 0.$$

Kohdan 2 teoria ei ole käytettävissä, sillä nyt $R = 0$. Esimerkiksi konjugaattijakaumaan perustuva todistustekniikka ei ole hyödyllinen eikä Lauseen 2.1 tulos myöskään päde.

Merkitään $F(x) = \mathbb{P}(\xi \le x)$ ja

$$\bar{F}(x) = \mathbb{P}(\xi > x), \quad x \in \mathbb{R},$$

sekä

$$M_n = \max(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

<u>Lause 3.1</u> Olkoon $b > 0$. Edellä esitetyin oletuksin

$$\lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le bU_0) = 1 - \alpha \tag{3.1.1}$$

ja

$$\lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = 1 - \alpha. \tag{3.1.2}$$

Olkoon $c > 0$ kiinteä. On helppo nähdä, että

$$\lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > cU_0) = 1 - \alpha.$$

Tämä viittaa siihen, että vararikon tuloksessa (3.1.1) aiheuttaa yksi suuri ξ_j, $j \le bU_0$.

Esitetään muutama lemma ennen lauseen todistamista.

Lemma 3.1.1. Olkoon $a>0$, $\mathbb{P}(\eta \in [0,a]) = 1$ ja $\mathbb{P}(\eta > 0) > 0$ sekä $h > 0$. Silloin

$$(3.2) \qquad \mathbb{E}(e^{h\eta}) \leq \frac{e^{ha}-1}{a}\,\mathbb{E}(\eta) + 1$$

ja

$$(3.2.1) \qquad \mathbb{E}(e^{h\eta}) \leq \frac{e^{ha}-1-ha}{a^2}\,\mathbb{E}(\eta^2) + 1 + h\,\mathbb{E}(\eta).$$

Todistus. Eksponenttifunktion sarjakehitelmän nojalla

$$x \mapsto \frac{e^{hx}-1}{x}$$

ja

$$x \mapsto \frac{e^{hx}-1-hx}{x^2}$$

määrittelevät kasvavat funktiot alueessa $x \in (0,\infty)$. Siispä

$$\mathbb{E}(e^{h\eta}) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{h\eta}-1}{\eta}\,\eta\,\mathbb{1}(\eta>0)\right) + 1$$
$$\leq \frac{e^{ha}-1}{a}\,\mathbb{E}(\eta) + 1$$

ja

$$\mathbb{E}(e^{h\eta}) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{h\eta}-1-h\eta}{\eta^2}\,\eta^2\,\mathbb{1}(\eta>0)\right) + 1 + h\,\mathbb{E}(\eta)$$
$$\leq \frac{e^{ha}-1-ha}{a^2}\,\mathbb{E}(\eta^2) + 1 + h\,\mathbb{E}(\eta). \qquad \square$$

Lemma 3.1.2. Olkoot $f_1, f_2 : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mielivaltaisia ja

$$\beta_j = \limsup_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log f_j(x) \in [-\infty, \infty], \quad j = 1, 2.$$

Silloin

$$\limsup_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log (f_1(x) + f_2(x))$$

$$= \limsup_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log (\max (f_1(x), f_2(x)))$$

$$= \max (\beta_1, \beta_2).$$

Todistus. Tulokset seuraavat suoraviivaisesti epäyhtälöistä

$$\max(f_1(x), f_2(x)) \le f_1(x) + f_2(x) \le 2 \max(f_1(x), f_2(x)), \quad x > 0. \qquad \square$$

Lemma 3.2. Olkoon $\delta > 0$. Silloin lauseen 3.1 oletuksin

$$(3.3) \qquad \lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > 0,\ M_n \le n^{1-\delta}) = -\infty$$

ja

$$(3.4) \qquad \lim_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le bU_0,\ M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \le U_0^{1-\delta}) = -\infty.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$, $h = h_n = n^{-1+\delta/2}$ ja

$$\xi' = \xi \mathbb{1}(\xi \le n^{1-\delta}).$$

Osoitetaan aluksi, että voidaan määrätä sellainen $\varepsilon' > 0$, että

$$(3.5) \qquad \mathbb{E}(e^{h\xi'}) \le e^{-h\varepsilon'},$$

kun n on riittävän suuri.

Olkoon $\varepsilon'' > 0$. Koska $\mu < \infty$, voidaan määrätä sellainen $c > 0$, että

$$\mathbb{E}(\max(\xi, -c)) < \mu + \varepsilon''.$$

Olkoon

$$\xi'' = \max(\xi', -c) + c.$$

Tällöin $\mathbb{P}(\xi'' \in [0, n^{1-\delta} + c]) = 1$. Merkitään $\mu'' = \mathbb{E}(\xi'')$. Lemman 3.1.1 nojalla

$$\mathbb{E}(e^{h\xi''}) \le \frac{e^{h(n^{1-\delta}+c)}-1}{n^{1-\delta}+c}\mu'' + 1.$$

Koska $h(n^{1-\delta}+c) \to 0$, kun $n \to \infty$, ja

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1,$$

niin

$$\mathbb{E}(e^{h\xi''}) \le (1+\varepsilon)h\mu''+1 \le e^{(1+\varepsilon)h\mu''},$$

kun n on suuri. Nähdään, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{h\xi'}) &\le \mathbb{E}(e^{h\xi''})e^{-hc}\\ &\le e^{(1+\varepsilon)h(\mu+\varepsilon''+c)-hc}\\ &= e^{h((1+\varepsilon)\mu+(1+\varepsilon)\varepsilon''+\varepsilon c)}.\end{aligned}$$

Yläraja (3.5) saadaan valitsemalla ensin ε'' pieneksi (mikä kiinnittää c:n) ja sen jälkeen ε riittävän pieneksi, sillä $\mu<0$.

Todistetaan (3.3). Olkoon

$$\xi_j' = \xi_j 1(\xi_j \le n^{1-\delta}), \quad j = 1, 2, \dots,$$

ja

$$Y_n' = \xi_1' + \dots + \xi_n'.$$

Tšebyševin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{E}(e^{hY_n'}) \ge \mathbb{E}(e^{hY_n'} 1(Y_n' > 0)) \ge \mathbb{P}(Y_n' > 0).$$

Arvion (3.5) nojalla

$$\mathbb{P}(Y_n' > 0) \le (e^{-h\varepsilon'})^n = e^{-n^{\delta/2}\varepsilon'}.$$

Saadaan

$$\limsup_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n' > 0) = -\infty.$$

Väite seuraa tästä, sillä

$$\mathbb{P}(Y_n > 0, M_n \le n^{1-\delta}) \le \mathbb{P}(Y_n' > 0).$$

Todistetaan (3.4). Selvästi

$$\mathbb{P}(T \le bU_0, M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \le U_0^{1-\delta})$$

$$\le \sum_{n \le bU_0} \mathbb{P}(Y_n > U_0, M_n \le U_0^{1-\delta})$$

$$\le \sum_{n \le bU_0} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i 1(\xi_i \le U_0^{1-\delta}) > U_0\right).$$

Epäyhtälön (3.5) nojalla

$$\mathbb{E}\left(e^{h'\xi} 1(\xi \le U_0^{1-\delta}) \right) \le e^{-h'\varepsilon'},$$

missä $h' = h'(U_0) = U_0^{-1+\delta/2}$ ja U_0 on suuri.

Tšebyshevin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i 1(\xi_i \le U_0^{1-\delta}) > U_0 \right)$$

$$\le e^{-h' U_0} \left(e^{-h'\varepsilon'} \right)^n \le e^{-h' U_0} = e^{-U_0^{\delta/2}}.$$

Saadaan siis

$$\mathbb{P}(T \le bU_0, M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \le U_0^{1-\delta}) \le bU_0 e^{-U_0^{\delta/2}},$$

josta (3.4) seuraa. $\square$

<u>Lauseen 3.1 todistus</u>. Ilmeisesti

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0) \leq \mathbb{P}(T \leq bU_0, M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \leq U_0^{1-\delta}) + \mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0^{1-\delta}).$$

Nyt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0^{1-\delta}) &= 1 - \mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \leq U_0^{1-\delta}) \\ &= 1 - (1 - \bar{F}(U_0^{1-\delta}))^{\lfloor bU_0 \rfloor} \\ &\leq 1 - e^{bU_0 \log(1 - \bar{F}(U_0^{1-\delta}))}.\end{aligned}$$

Koska

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1-x)}{x} = -1,$$

niin

$$\log(1 - \bar{F}(U_0^{1-\delta})) \geq -(1+\delta)\bar{F}(U_0^{1-\delta}),$$

kun U_0 on suuri. Valitsemalla δ pieneksi saadaan

$$\begin{aligned}(3.6) \quad \mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0^{1-\delta}) &\leq 1 - e^{-bU_0(1+\delta)\bar{F}(U_0^{1-\delta})} \\ &= 1 - (1 - bU_0(1+\delta)\bar{F}(U_0^{1-\delta})(1+o(1))) \\ &= (1+o(1))\, bU_0 (1+\delta)\bar{F}(U_0^{1-\delta}).\end{aligned}$$

Raja-arvon (3.1) nojalla

$$\begin{aligned}&\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0^{1-\delta}) \\ &\leq 1 + \limsup_{U_0 \to \infty} (1-\delta)(\log U_0^{1-\delta})^{-1} \log \bar{F}(U_0^{1-\delta}) \\ &= 1 - (1-\delta)\alpha.\end{aligned}$$

Nyt $\mathbb{P}(T \leq bU_0, M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \leq U_0^{1-\delta})$ on erittäin pieni lemman 3.2 nojalla.

Antamalla δ:in mennä kohti nollaa saadaan

$$(3.7) \quad \limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le b U_0) \le 1 - \alpha .$$

Johdetaan ylärajoja todennäköisyydelle $\mathbb{P}(T \in (U_0, \infty))$. Olkoon $\delta > 0$. Mielivaltaiselle $y \ge 1$ pätee

$$(3.8) \quad \mathbb{P}(T \in [U_0^y, U_0^{y+\delta}])$$

$$\le \mathbb{P}(Y_n > 0 \text{ jollain } n \in [U_0^y, U_0^{y+\delta}],\ M_{\lfloor U_0^{y+\delta} \rfloor} \le U_0^{y(1-\delta)})$$

$$+ \mathbb{P}(Y_n > 0 \text{ jollain } n \in [U_0^y, U_0^{y+\delta}],\ M_{\lfloor U_0^{y+\delta} \rfloor} > U_0^{y(1-\delta)}).$$

Olkoon $Q_1(U_0, y)$ ensimmäinen ja $Q_2(U_0, y)$ toinen (3.8):n oikean puolen todennäköisyyksistä. Olkoon $\beta > \alpha$. Lemman 3.2 nojalla

$$Q_1(U_0, y) \le \sum_{n \in [U_0^y, U_0^{y+\delta}]} \mathbb{P}(Y_n > 0,\ M_n \le n^{1-\delta})$$

$$(3.9) \quad \le U_0^{y+\delta}\, U_0^{-y\beta} \le U_0^{\delta + y(1-\beta)}, \text{ kun } U_0 \text{ on suuri.}$$

Arvio on tasainen alueessa $y \ge 1$ (ts. voidaan valita $\bar{U}$ siten, että epäyhtälö pätee kaikilla $y \ge 1$, kunhan $U_0 \ge \bar{U}$). Edelleen

$$Q_2(U_0, y) \le \mathbb{P}(M_{\lfloor U_0^{y+\delta} \rfloor} > U_0^{y(1-\delta)})$$

$$\le \mathbb{P}(M_{\lfloor U_0^{y+\delta} \rfloor} > \lfloor U_0^{y+\delta} \rfloor^{\frac{y(1-\delta)}{y+\delta}})$$

$$= \mathbb{P}(M_{\lfloor U_0^{y+\delta} \rfloor} > \lfloor U_0^{y+\delta} \rfloor^{1-\delta-\frac{\delta(1-\delta)}{y+\delta}})$$

$$\le \mathbb{P}(M_{\lfloor U_0^{y+\delta} \rfloor} > \lfloor U_0^{y+\delta} \rfloor^{1-\delta'})$$

missä $\delta' = \delta + \frac{\delta(1-\delta)}{1+\delta}$. Kuten (3.6):sta nähdään, että annetulle $\varepsilon > 0$ voidaan määrätä δ siten, että

$$Q_2(U_0, y) \le U_0^{-y(\alpha-1-\varepsilon)}, \quad \forall y \ge 1,$$

kun $U_0 > \bar{U}$ ($\bar{U}$ ei riipu y:stä). Yhdistämällä tulokset saadaan

$$\mathbb{P}(T \in (U_0, \infty)) \le \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(T \in \left[U_0^{1+j\delta}, U_0^{1+(j+1)\delta}\right]\right)$$

$$\le U_0^{1+\delta-\beta} \sum_{j=0}^{\infty} U_0^{j\delta(1-\beta)} + U_0^{1-\alpha+\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} U_0^{-j\delta(\alpha-1-\varepsilon)}.$$

Molemmat sarjat suppenevat, kun ε on pieni ja siis

$$\mathbb{P}(T \in (U_0, \infty)) \le K U_0^{1-\alpha+\varepsilon},$$

kun U_0 on suuri, missä K on vakio. Yhdistämällä tämä arvioon (3.2) ja antamalla $\varepsilon \to 0+$ saadaan lemmasta 3.1.2

(3.10) $$\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \le 1 - \alpha,$$

Olkoon $b \in (0,1)$ mielivaltainen. Lauseen molemmat väitteet tulevat todistetuksi, jos tällöin

(3.10.1) $$\liminf_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le b U_0) \ge 1 - \alpha,$$

Kun U_0 on suuri, pätee annetulle $\varepsilon > 0$,

(3.11) $$\mathbb{P}(T \le b U_0) \ge \mathbb{P}(Y_{\lfloor b U_0 \rfloor} > U_0)$$

$$\ge \lfloor b U_0 \rfloor \, \mathbb{P}\left(\xi_1 > U_0^{1+\varepsilon}, \ \xi_i \le U_0^{1+\varepsilon}, \ i = 2, \dots, \lfloor b U_0 \rfloor, \ Y_{\lfloor b U_0 \rfloor} - \xi_1 \ge \lfloor b U_0 \rfloor (\mu - \varepsilon)\right)$$

$$= \lfloor b U_0 \rfloor \, \bar{F}(U_0^{1+\varepsilon}) \, \mathbb{P}\left(\xi_i \le U_0^{1+\varepsilon}, \ i = 2, \dots, \lfloor b U_0 \rfloor, \ Y_{\lfloor b U_0 \rfloor} - \xi_1 \ge \lfloor b U_0 \rfloor (\mu - \varepsilon)\right).$$

Kuten (3.6):issa nähdään, että

$$\mathbb{P}(\xi_i \le U_0^{1+\varepsilon},\ i=2,\dots,\lfloor bU_0 \rfloor) \ge \exp(-bU_0 \bar{F}(U_0^{1+\varepsilon})(1+\varepsilon)),$$

kun U_0 on suuri. Koska $\alpha > 1$, niin

$$\lim_{U_0 \to \infty} \mathbb{P}(\xi_i \le U_0^{1+\varepsilon},\ i=2,\dots,\lfloor bU_0 \rfloor) = 1.$$

Suurten lukujen lain nojalla

$$\lim_{U_0 \to \infty} \mathbb{P}(Y_{\lfloor bU_0 \rfloor} - \xi_1 \ge \lfloor bU_0 \rfloor (\mu - \varepsilon)) = 1.$$

Arvion (3.11) nojalla

$$\liminf_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le bU_0)$$

$$\ge \liminf_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \left(\lfloor bU_0 \rfloor \bar{F}(U_0^{1+\varepsilon}) \right) = 1 - (1+\varepsilon)\alpha.$$

Alaraja (3.10.1) seuraa tästä. $\square$

3.1. Osasummien suurista poikkeamista

Olkoon satunnaisjakso $\{Y_n\}$ kuten kohdan 3 alussa. Oletetaan kuitenkin nyt vain, että $\mu \in \mathbb{R}$. Lisäksi oletetaan, että (3.1) pätee ja että $\alpha \in (1, \infty)$.

Lause 3.3. Olkoon $a > \mu$ kiinteä. Edellä esitetyin oletuksin

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > na) = 1-\alpha.$$

Todistetaan ensin hieman yleisempi versio lemman 3.2 ensimmäisestä tuloksesta.

Lemma 3.4. Olkoon $\delta > 0$. Silloin lauseen 3.3 oletuksin

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > na, M_n \leq n^{1-\delta}) = -\infty.$$

Todistus. Selvästi

$$\mathbb{P}(Y_n > na, M_n \leq n^{1-\delta})$$

$$= \mathbb{P}((\xi_1 - a) + \dots + (\xi_n - a) > 0, \max(\xi_1 - a, \dots, \xi_n - a) \leq n^{1-\delta} - a)$$

$$\leq \mathbb{P}((\xi_1 - a) + \dots + (\xi_n - a) > 0, \max(\xi_1 - a, \dots, \xi_n - a) \leq n^{1-\delta/2}),$$

kun n on suuri. Väite seuraa lemmasta 3.2. $\square$

Lauseen 3.3 todistus. Lemman 3.4 nojalla

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \leq n\bar{F}(n^{1-\delta}) + n^{-\varkappa},$$

kun n on suuri, missä $\varkappa > 0$ on kiinteä (mutta suuri). Nähdään, että

$$\limsup_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > na) \leq 1-(1-\delta)\alpha.$$

Toisaalta annetulle $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \geq n\,\mathbb{P}(\xi_1 > n^{1+\varepsilon}, \xi_i \leq n^{1+\varepsilon}, i=2,\dots,n, Y_n - \xi_1 > n(\mu-\varepsilon))$$

$$= n\bar{F}(n^{1+\varepsilon})\,\mathbb{P}(\xi_i \leq n^{1+\varepsilon}, i=2,\dots,n, Y_n-\xi_1 > n(\mu-\varepsilon)).$$

Viimeinen todennäköisyys suppenee kohti ykköstä, joten

$$\liminf_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > na) \geq 1-(1+\varepsilon)\alpha.$$

Lemman väite seuraa saaduista tuloksista. $\square$

3.2. Tarkennetut estimaatit

Edellä esitetyt tulokset antavat lähinnä harvinaisiin tapahtumiin liittyviä (polynomiaalisia) häviämisvauhteja. Pyritään nyt selvittämään todennäköisyyksien tarkka asymptoottinen muoto. Tähän tarvitaan uusi oletus:

$$(3.15) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \limsup_{x \to \infty} \frac{\bar{F}(x(1-\varepsilon))}{\bar{F}(x)} = 1.$$

<u>Lause 3.5.</u> Olkoon $\{Y_n\}$ satunnaiskulku, joka toteuttaa lauseen 3.3 ehdot ja ehdon (3.15). Silloin

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathbb{P}(Y_n > na)}{n\bar{F}(n(a-\mu))} = 1.$$

Esitetään ensin lemma, joka 'estää' monta suurta lisäystä suuren poikkeaman tapahtuessa.

Lemma 3.6. Lemman 3.4 oletuksin

$$\limsup_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > na,\ \xi_i > n^{1-\delta},\ \xi_j > n^{1-\delta} \text{ jollain } i\neq j,\ i,j\leq n)$$

$$\leq 2(1-\alpha+\delta\alpha)$$

Todistus. Triviaalisti

$$\mathbb{P}(Y_n > na,\ \xi_i > n^{1-\delta},\ \xi_j > n^{1-\delta} \text{ jollain } i\neq j,\ i,j\leq n)$$

$$\leq \mathbb{P}(\xi_i > n^{1-\delta},\ \xi_j > n^{1-\delta} \text{ jollain } i\neq j,\ i,j\leq n)$$

$$\leq n^2 \bar{F}(n^{1-\delta})^2.$$ Väite seuraa oletuksesta 3.1. $\square$

Lauseen 3.5 todistus. Lemmojen 3.4 ja 3.6 nojalla

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \leq \mathbb{P}(Y_n > na,\ \xi_j > n^{1-\delta} \text{ tasan yhdellä } j\leq n) + o(1)n^{1-\alpha-\varepsilon'}$$

eräälle $\varepsilon' > 0$, kunhan $\delta > 0$ on riittävän pieni. Nyt, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(Y_n > na,\ \xi_1 > n^{1-\delta};\ \xi_j \leq n^{1-\delta},\ j=2,\dots,n)$$

$$\leq \mathbb{P}(Y_n > na,\ \xi_1 \in (n^{1-\delta}, n(a-\mu-\varepsilon)],\ \xi_j \leq n^{1-\delta},\ j=2,\dots,n)$$

$$+ \mathbb{P}(Y_n > na,\ \xi_1 > n(a-\mu-\varepsilon))$$

$$\leq \mathbb{P}(Y_{n-1} > n(\mu+\varepsilon),\ \xi_j \leq n^{1-\delta},\ j=1,\dots,n-1) + \bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon)).$$

Lemman 3.4 ja symmetrian nojalla

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \le n\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon)) + o(1)n^{1-\alpha-\varepsilon'}$$

$$= (1+o(1))\, n\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon)).$$

Siispä

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y_n > na)}{n\bar{F}(n(a-\mu))}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y_n > na)}{n\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon))} \cdot \frac{\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon))}{\bar{F}(n(a-\mu))}$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \frac{\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon))}{\bar{F}(n(a-\mu))}.$$

Oletuksen (3.15) nojalla

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y_n > na)}{n\bar{F}(n(a-\mu))} \le 1.$$

Toisaalta

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \ge n\mathbb{P}(\xi_1 > n(a-\mu+\varepsilon),\ \xi_j \le n(a-\mu+\varepsilon),\ j=2,\dots,n,$$
$$Y_n - \xi_1 > n(\mu-\varepsilon)).$$

Nähdään kuten lauseen 3.1 loppuosassa, että

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \ge n\bar{F}(n(a-\mu-\varepsilon))(1+o(1)).$$

Oletuksesta (3.15) seuraa, että

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y_n > na)}{n\bar{F}(n(a-\mu))} \ge 1. \quad \square$$