RISKITEORIAN JATKOKURSSI, KEVÄT 2014

Helsingin yliopisto
Harri Nyrhinen

1. Johdanto

Vakuutusyhtiön vakavaraisuus on ehkä eniten tutkittu kysymys riskiteoriassa. Tutkimus jatkuu edelleen vilkkaana. Kurssin tarkoitus on laajentaa riskiteorian peruskurssia tältä osin. Klassisen teorian laajennuksena esitetään ns. Cramér-Lundbergin approksimaatio äärettömän aikajänteen vararikkotodennäköisyydelle. Tuoreempana kehityssuuntina tarkastellaan paksuhäntäisiin jakaumiin liittyvää teoriaa sekä malleja, joissa sijoitustoiminta otetaan huomioon. Lisäksi tarkastellaan osasummiin liittyvien suurten poikkeamien asymptotiikkaa.

2. Cramér – Lundbergin approksimaatio

Olkoot $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$Y_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n.$$

Olkoon $U_0 > 0$ alkupääoma ja

$$T = T(U_0) = \inf\{n \mid Y_n > 0\}$$

$(T = \infty$, jos $Y_n \le 0$, $\forall n)$. Siis Y_n kuvaa yhtiön kumulatiivista tappiota.

Olkoon c muuttujan ξ kumulantit generoiva funktio,

$$c(s) = \log \mathbb{E}(e^{s\xi}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Merkitään

$$D = \{s \in \mathbb{R} \mid c(s) < \infty\}.$$

Olkoon R Lundbergin eksponentti,

$$R = \sup\{s \ge 0 \mid c(s) \le 0\}.$$

Muuttujan ξ jakauma on <u>aritmeettinen</u>, jos on olemassa sellainen $a \in \mathbb{R}$, että

(2.1) $$\mathbb{P}(\xi \in \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}) = 1.$$

Aritmeettisen jakauman <u>jänne</u> on maksimaalinen a, jolle (2.1) pätee.

Lause 2.1. (Cramér-Lundbergin approksimaatio). Oletetaan, että R on joukon $\mathcal{D} \cap (0, \infty)$ sisäpiste. Jos ξ:n jakauma ei ole aritmeettinen, niin

$$(2.2) \qquad \lim_{U_0 \to \infty} e^{RU_0} \mathbb{P}(T(U_0) < \infty) = C$$

missä

$$C = \frac{\mathbb{P}(T(0) = \infty)}{R \, \mathbb{E}(Y_{T(0)} e^{R Y_{T(0)}} 1(T(0) < \infty))}.$$

Selvästi C lauseessa 2.1 on positiivinen. Tuloksesta seuraa

$$(2.3) \qquad \lim_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = -R.$$

Tulos (2.2) on tätä vahvempi.

Aritmeettisen jakauman tapauksessa pätee vastaava tulos. Rajankäynti (2.2):ssa on suoritettava kuitenkin jänteen monikertoina ja vakiolla C on erilainen esitys.

2.1. Teoreettisia apuvälineitä

Lauseen 2.1 todistus perustetaan uusiutumisteoriaan. Tarkastellaan ensin tätä tarpeellisin osin.

Olkoot $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$S_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

sekä $S_0 = 0$. Olkoon F muuttujan η kertymäfunktio. Oletetaan, että $F(0) = 0$ ts. η on positiivinen m.v. Tällöin $\{S_n\}$ on uusiutumisprosessi. Olkoon $\mu = \mathbb{E}(\eta) \in (0, \infty]$

Olkoon

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \le x), \quad x \ge 0,$$

ja $U(x) = 0$, kun $x < 0$. Tätä kutsutaan usein uusiutumismitaksi (tällöin U laajennetaan tietysti mitaksi $([0,\infty), \mathcal{B})$:lle, välin $(a,b]$ mitta on $U(b) - U(a)$). Koska $S_0 = 0$, on $U(0) = 1$. Lisäksi $U(x)$ kuvaa 'osumia' välille $[0, x]$ odotusarvomielessä. Olkoon nimittäin

$$N = N_x = \#\{n \ge 0 \mid S_n \le x\}.$$

Silloin

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n \, \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N = n)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \ge k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{k-1} \le x) = U(x).$$

Lemma 2.2. $U(x) < \infty$, $\forall x$. Olkoon $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rajoitettu mitallinen funktio ja $z(x) = 0$, $\forall x < 0$. Silloin

$$(2.5) \quad Z(x) = \int_{0-}^{x} z(x-y)\, dU(y)$$

toteuttaa uusiutumisyhtälön

$$(2.6) \quad Z(x) = z(x) + \int_{0}^{x} Z(x-y)\, dF(y).$$

Lisäksi (2.6):lla ei ole muita sellaisia ratkaisuja, jotka ovat rajoitettuja äärellisillä väleillä ja häviävät alueessa $x < 0$.

Huomautus 2.2. Integrointi U:n suhteen (2.5):ssä voidaan ajatella odotusarvoista muodostuvana sarjana:

$$\int_{0-}^{x} f(y)\, dU(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0-}^{x} f(y)\, dF^{n*}(y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(f(S_n) 1(S_n \le x) \right).$$

Lemman 2.2. todistus. Olkoon

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} F^{k*}(x).$$ Valitaan $\alpha, \beta > 0$ siten, että

$$1 - F(\alpha) > \beta.$$

Ilmeisesti kaikilla $x > 0$

$$\int_{0-}^{x} (1 - F(x-y))\, dU_n(y) = 1 - F^{(n+1)*}(x) \leq 1.$$

Erityisesti jos $x \geq \alpha$, niin

$$\int_{x-\alpha}^{x} (1 - F(x-y))\, dU_n(y) \leq 1.$$

Lisäksi

$$\int_{x-\alpha}^{x} (1 - F(x-y))\, dU_n(y) > \beta \big(U_n(x) - U_n(x-\alpha)\big),$$

joten

$$U_n(x) - U_n(x-\alpha) \leq \frac{1}{\beta}.$$

Nähdään, että $U(x) \leq U(x-\alpha) + \frac{1}{\beta}$, $\forall x \geq \alpha$. Siispä

$$U(\alpha) \leq U(0) + \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{\beta}.$$

Jos $x > 0$ on annettu, on $U(x) \leq \frac{k}{\beta} + 1$, kun k valitaan siten, että $k\alpha \geq x$.

On osoitettava vielä uusiutumisyhtälön (2.6) ratkaisua koskevat tulokset. Ensinnäkin $U(x) < \infty$ ja z on rajoitettu, joten $Z(x) < \infty$. Nyt

$$\int_0^x \Big[\int_{0-}^{x-y} z(x-y+v)\, dU(v) \Big] dF(y)$$

$$= \int_0^x \Big[\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{x-y} z(x-y-v)\, dF^{k*}(v) \Big] dF(y)$$

$$\overset{DKL}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \Big[\int_0^{x-y} z(x-y-v)\, dF^{k*}(v) \Big] dF(y)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x z(x-y)\, dF^{k*}(y) = \int_{0-}^x z(x-y)\, dU(y) - z(x).$$

Nähdään, että (2.5) on (2.6):n ratkaisu.

Jos Z_1 ja Z_2 ovat (2.6):n ratkaisuja, niin

$$Z_1(x) - Z_2(x) = \int_0^x \big(Z_1(x-y) - Z_2(x-y)\big)\, dF(y), \quad \forall x.$$

Nähdään, että

$$Z_1(x) - Z_2(x) = \int_0^x \big(Z_1(x-y) - Z_2(x-y)\big)\, dF^{n*}(y), \quad \forall n.$$

Koska $F^{n*}(x) = \mathbb{P}(S_n \le x) \xrightarrow{SLL} 0$, kun $n \to \infty$,

on välttämättä $Z_1(x) - Z_2(x) = 0$, $\forall x$. $\square$

Funktiota $z : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sanotaan <u>oleellisesti</u> (Riemann) <u>integroituvaksi</u>, jos

$$\lim_{h \to 0+} h \sum_{k=1}^{\infty} \underline{m}_k(h) = \lim_{h \to 0+} h \sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}_k(h) < \infty,$$

missä

(2.7) $\underline{m}_k(h) = \inf \{ z(x) \mid (k-1)h \le x < kh \}$

ja

(2.8) $\overline{m}_k(h) = \sup \{ z(x) \mid (k-1)h \le x < kh \}$.

<u>Lause 2.3</u>. Olkoon $z : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ oleellisesti integroituva ja Z uusiutumisyhtälön (2.6) ratkaisu (2.5). Jos F ei ole aritmeettinen, niin

$$\lim_{x \to \infty} Z(x) = \mu^{-1} \int_0^{\infty} z(y)\, dy,$$

missä $\mu = \mathbb{E}(\eta)$. Jos F on aritmeettinen jänteenä a, niin

$$\lim_{n \to \infty} Z(x + na) = \frac{a}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} z(x + ka)$$

kaikilla $x \ge 0$.

Todistus on esitetty lähteessä Feller (1971). An introduction to probability theory and its applications, liite $\overline{\text{XI}}$. Second edition. Wiley.

Lausetta 2.3 kutsutaan <u>uusiutumislauseeksi</u>.

Esimerkki 2.1. Oletetaan, että $z \geq 0$ on Riemann-integroituva jokaisella välillä $[0, a]$ ja että

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}_k(h_0) < \infty$$

eräälle $h_0 > 0$. Tällöin z on oleellisesti integroituva. Olkoon nimittäin $\varepsilon > 0$ ja k_0 sellainen, että

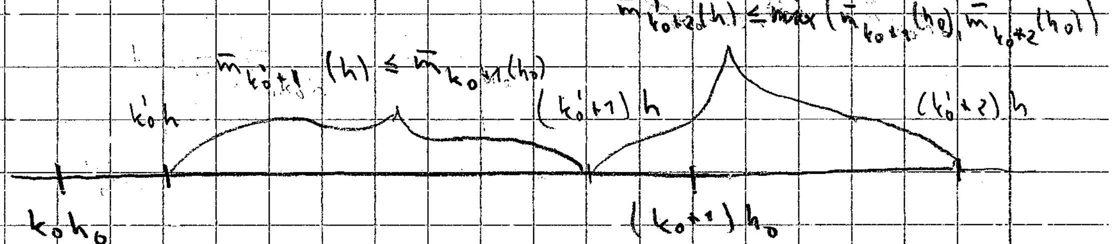
$$h_0 \sum_{k=k_0}^{\infty} \overline{m}_k(h_0) < \varepsilon .$$

Olkoon $h < h_0$ ja $r = \left[\frac{h_0}{h}\right] + 1$. Ilmeisesti

$$h \sum_{k=k_0'}^{\infty} \overline{m}_k(h) \leq r h \sum_{k=k_0}^{\infty} \overline{m}_k(h_0)$$

$$\leq (h_0 + 2h) \sum_{k=k_0}^{\infty} \overline{m}_k(h_0) < 3\varepsilon ,$$

missä k_0' on pienin sellainen kokonaisluku, että $k_0' h \geq k_0 h_0$.



Valitsemalla $a = (k_0+1) h_0$, saadaan

$$\left| h \sum_{k, kh \leq a} \overline{m}_k(h) - h \sum_{k, kh \leq a} \underline{m}_k(h) \right| < \varepsilon ,$$

Riemann integroituvuuden nojalla, kun h on pieni. Alkuosan nojalla sama saadaan summille alueessa k, $kh > a$, josta väite seuraa.

2.2. Päätuloksen todistus

Lauseen 2.1 todistus. Käsitellään vain tapausta, jossa ξ:n jakauma ei ole aritmeettinen. Siirtymällä konjugaattijakaumaan parametrilla R saadaan esitys

$$(2.9) \quad \mathbb{P}(T<\infty) = \mathbb{E}_R\left(e^{-RY_T}\,\mathbb{1}(T<\infty)\right)$$

$$= e^{-RU_0}\;\mathbb{E}_R\left(e^{-R(Y_T-U_0)}\right).$$

Ks. Riskiteoria 2011. Riittää siis todistaa, että viimeinen odotusarvo suppenee kohti positiivista vakiota. Tätä varten osoitetaan ensin, että $Y_T - U_0$ suppenee jakaumaltaan.

Olkoon $\tau_0 = 0$ ja $Y_0 = 0$. Määritellään

$$\tau_{k+1} = \inf\{n > \tau_k \mid Y_n > Y_{\tau_k}\}, \quad k = 0,1,2,\dots$$

ja merkitään

$$\eta_k = Y_{\tau_k} - Y_{\tau_{k-1}}, \quad k = 1,2,\dots.$$

Koska $\mathbb{E}_R(\xi) = c'(R) > 0$, ovat sekä τ_k että η_k aitoja satunnaismuuttujia (esim. $\mathbb{P}(\tau_k < \infty) = 1,\ \forall k$). Ilmeisesti $\tau_1, \tau_2-\tau_1, \tau_3-\tau_2, \dots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, samoin $\eta_1, \eta_2, \dots$. Lisäksi η-muuttujat ovat positiivisia, joten $\{S_n\}$,

$$S_n = \eta_1 + \dots + \eta_n,$$

on uusiutumisprosessi. Suoraviivaisesti nähdään, että η-muuttujat eivät ole aritmeettisia.

(Nimitys: $\tau_1, \tau_2, \dots$ ovat <u>tikasindeksejä</u>, $\eta_1, \eta_2, \dots$ <u>tikaskorkeuksia</u>.)

Olkoon

$$T' = \inf\{n \mid S_n > U_0\}.$$

Ilmeisesti $S_{T'} = Y_T$. Olkoon $x \geq 0$ kiinteä ja

$$G_{U_0}(x) = \mathbb{P}_R(S_{T'} - U_0 \leq x).$$

Silloin (F_R on η_1:n kertymäfunktio kanj. jakaumassa)

$$G_{U_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_R(S_n \leq U_0,\ S_n + \eta_{n+1} \in (U_0, U_0 + x])$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0-}^{U_0} \mathbb{P}_R(\eta_1 \in (U_0 - y,\ U_0 - y + x])\, dF_R^{n*}(y).$$

Olkoon $z(U_0) = \mathbb{P}_R(\eta_1 \leq U_0 + x) - \mathbb{P}_R(\eta_1 \leq U_0)$.
Tällöin

$$G_{U_0}(x) = \int_{0-}^{U_0} z(U_0 - y)\, dU(y).$$

Lemman 2.2 nojalla $Z(U_0) = G_{U_0}(x)$ toteuttaa uusiutumisyhtälön

$$Z(U_0) = z(U_0) + \int_0^{U_0} Z(U_0 - y)\, dF_R(y).$$

Selvästi

$$z(U_0) \leq \mathbb{P}_R(\eta_1 \leq (n+2)x) - \mathbb{P}_R(\eta_1 \leq nx)$$

kun $nx \leq U_0 \leq (n+1)x$. Koska

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{P}_R(\eta_1 \leq (n+2)x) - \mathbb{P}_R(\eta_1 \leq nx) \right) \leq 2,$$

on z suoraan integroituva esimerkin 2.1 nojalla.

Uusiutumislauseen nojalla $(\mu_R = \mathbb{E}_R(\eta_1))$

$$\lim_{U_0\to\infty} G_{U_0}(x) = \mu_R^{-1}\int_0^\infty \left[\mathbb{P}_R(\eta_1 \le y+x) - \mathbb{P}_R(\eta_1 \le y)\right] dy$$

$$= \mu_R^{-1}\int_0^\infty \left[\mathbb{P}_R(\eta_1 > y) - \mathbb{P}_R(\eta_1 > y+x)\right] dy$$

$$= \mu_R^{-1}\left[\int_0^x \mathbb{P}_R(\eta_1 > y)\,dy + \int_x^\infty \mathbb{P}_R(\eta_1 > y)\,dy - \int_0^\infty \mathbb{P}_R(\eta_1 > y+x)\,dy\right]$$

$$= \mu_R^{-1}\int_0^x \mathbb{P}_R(\eta_1 > y)\,dy.$$

Nähdään, että $Y_T - U_0$ suppenee jakaumaltaan kohti satunnaismuuttujaa, jonka kertymäfunktio on J,

$$J(x) = \mu_R^{-1}\int_0^x \mathbb{P}_R(\eta_1 > y)\,dy,\quad x \ge 0.$$

Koska kuvaus $x \mapsto e^{-Rx}\mathbb{1}(x\ge 0)$ on jatkuva ja rajoitettu alueessa $x \ge 0$, on

$$\lim_{U_0\to\infty} \mathbb{E}_R\left(e^{-R(Y_T - U_0)}\right) = \int_0^\infty e^{-Rx}\,dJ(x).$$

Selvästi raja-arvo on positiivinen ja siis lauseen väite C.

Nyt

$$\mu_R = \mathbb{E}_R(Y_{T_1}) = \mathbb{E}\left(e^{RY_{T_1}}\, Y_{T_1}\, \mathbb{1}(T_1 < \infty)\right).$$

Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\int_0^\infty e^{-Rx}\,dJ(x)$$

$$= \Big/_0^\infty e^{-Rx} J(x) - \int_0^\infty J(x)\,d\left(e^{-Rx}\right)$$

$$= R\int_0^\infty J(x) e^{-Rx}\,dx.$$

2.11.1.

Edelleen

$$\mu_R \int_0^\infty J(x) e^{-Rx}\, dx = \int_0^\infty \left[\mathbb{P}_R(\eta_1 > y) \int_y^\infty e^{-Rx} dx \right] dy$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^\infty \mathbb{P}_R(\eta_1 > y)\, e^{-Ry}\, dy$$

$$= -\frac{1}{R^2} \int_0^\infty \mathbb{P}_R(\eta_1 > y)\, d(e^{-Ry})$$

$$= -\frac{1}{R^2} \left[\Big/_0^\infty \mathbb{P}_R(\eta_1 > y) e^{-Ry} - \int_0^\infty e^{-Ry}\, d(\mathbb{P}_R(\eta_1 > y)) \right]$$

$$= -\frac{1}{R^2} \left[-1 + \int_0^\infty e^{-Ry}\, d(\mathbb{P}_R(\eta_1 \le y)) \right]$$

$$= -\frac{1}{R^2} \left[-1 + \mathbb{E}_R(e^{-R\eta_1}) \right]$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\tau_1 = \infty)}{R^2}.$$

Siis

$$\int_0^\infty e^{-Rx}\, dJ(x) = \frac{\mathbb{P}(\tau_1 = \infty)}{R\, \mu_R}. \quad \square$$

2.3. Jatkuva vararikkoteoria

Edellä vararikko voi tapahtua vain hetkinä $1, 2, \ldots$. Perustellumpaa on vaatia vahvemmin, että yhtiön varallisuuden tulee olla aina positiivinen. Lähelle tätä päästään valitsemalla aikayksikkö pieneksi, mutta asiaa voidaan lähestyä myös tarkasti.

Tarkastellaan asiaa Sparre-Andersenin mallissa, joka muodostuu seuraavista osista

1) Vahinkojen summat $Z, Z_1, Z_2, \ldots$

2) Vahinkojen sattumisvälit $V, V_1, V_2, \ldots$

3) Vakuutusmaksuintensiteetti P.

Oletetaan, että jonot $\{Z_n\}$ ja $\{V_n\}$ ovat molemmat i.i.d. ja että $\{Z_n\}$ ja $\{V_n\}$ ovat toisistaan riippumattomia. Olkoon U_0 alkupääoma kuten aiemminkin. Yhtiön hetkeen t mennessä kertynyt tappio $Y^c(t)$ on mallissa

$$Y^c(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k - Pt,$$

missä

$$N(t) = \sup\{m \mid V_1 + \cdots + V_m \le t\}.$$

Oletetaan seuraavassa, että $P(Z \ge 0) = 1$ ja $P > 0$.

Vararikkohetki määritellään ehdosta

$$T^c = \begin{cases} \inf\{t \ge 0 \mid Y^c(t) > U_0\} \\ +\infty, \text{ jos } Y^c(t) \le U_0, \ \forall t \ge 0. \end{cases}$$

Olkoon

$$\xi_j = Z_j - PV_j, \quad j = 1, 2, \ldots$$

ja

$$Y_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n.$$

Tällöin $\{Y_n\}$ on satunnaiskulku. Jos

$$T = \inf\{n \mid Y_n > U_0\}$$

ja T^c kuten edellä, niin ilmeisesti

$$\{T^c < \infty\} = \{T < \infty\},$$

Näin ollen

$$\mathbb{P}(T^c < \infty) \sim C e^{-RU_0}, \quad U_0 \to \infty,$$

missä C ja R ovat Lauseen 2.1 mukaiset liittyen muuttujaan

$$\xi = Z - PV.$$

Erityisesti $R > 0$, jos $\mathbb{E}(\xi) < 0$ eli

$$P > \frac{\mathbb{E}(Z)}{\mathbb{E}(V)}.$$

Esimerkki 2.2. Olkoon Z eksponentiaalisesti jakautunut parametrina δ ja V sellainen, että $\xi = Z - PV$ toteuttaa lauseen 2.1 ehdot. Siis

$$\mathbb{P}(Z > z) = e^{-\delta z}, \quad \forall z \geq 0.$$

Määrätään lauseen 2.1 vakio C.

Ilmeisesti

$$\mathbb{P}(T(0) < \infty) = \mathbb{E}_R\left(e^{-RY_{T(0)}} \mathbb{1}(T(0) < \infty)\right).$$

Selvää on, että $\mathbb{P}_R(T(0) < \infty) = 1$. Osoitetaan, että $Y_{T(0)}$ on eksponentiaalisesti jakautunut parametrina $\delta - R$, kun ξ:llä on konjugaattijakauma parametrina R. Selvästi

$$\mathbb{E}_R(e^{s\xi}) = \frac{\mathbb{E}(e^{(s+R)\xi})}{\mathbb{E}(e^{R\xi})}$$

$$= \frac{\mathbb{E}(e^{(s+R)Z})}{\mathbb{E}(e^{RZ})} \cdot \frac{\mathbb{E}(e^{-(s+R)PV})}{\mathbb{E}(e^{-RPV})}.$$

Nähdään, että konjugaattijakauman alaisuudessa ξ on muotoa

$$\xi = Z' - PV',$$

missä $Z' \perp\!\!\!\perp V'$, Z':lla on Z:n konjugaattijakauma parametrilla R ja V':lla on V:n konjugaattijakauma parametrilla $-PR$. Siis Z' on eksponenttijakautunut parametrina $\delta - R$.

Nyt kaikilla $y \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_R(Y_{T(0)} > y,\ T(0) = n)$$

$$= \mathbb{P}_R((\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in B_n,\ \xi_n > y - (\xi_1 + \dots + \xi_{n-1})),$$

missä

$$B_n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} ;\ x_1 \leq 0,\ x_1 + x_2 \leq 0, \dots,\ x_1 + \dots + x_{n-1} \leq 0\}.$$

Olkoon $H(x) = \mathbb{P}_R(\xi \leq x)$ ja $K(x) = \mathbb{P}_{-R\rho}(V \leq x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\mathbb{P}_R(Y_{T(0)} > y,\ T(0) = n)$$

$$= \int_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in B_n} \int_{v \in \mathbb{R}} e^{-(\varrho - R)(y + \rho v - x_1 - \dots - x_{n-1})} \, dH(x_1) \dots dH(x_{n-1}) \, dK(v)$$

$$= e^{-(\varrho - R) y} \, \mathbb{P}_R(T(0) = n).$$

Siis $\mathbb{P}_R(Y_{T(0)} > y) = e^{-(\varrho - R) y}$ ja

$$\mathbb{P}(T(0) < \infty) = \frac{\varrho - R}{\varrho}.$$

Lisäksi

$$\mathbb{E}(Y_{T(0)} \, e^{R Y_{T(0)}} \, 1(T(0) < \infty))$$

$$= \mathbb{E}_R(Y_{T(0)} \, 1(T(0) < \infty)) = \frac{1}{\varrho - R}$$

ja

$$C = \frac{\varrho - R}{\varrho}.$$

Itse asiassa tässä tapauksessa

$$\mathbb{P}(T(u_0) < \infty) = C_1 e^{-Ru_0}, \quad \forall u_0 > 0.$$

Tämä nähdään esityksestä (2.9) toteamalla, että myös $Y_{T(u_0)} - u_0$ on eksponenttijakautunut parametrilla $\beta - R$. Edellä esitetty laskelma menee läpi pienin muutoksin. Siispä

$$\mathbb{P}(T(u_0) < \infty) = e^{-Ru_0} \int_0^\infty e^{-Rx} (\beta - R) e^{-(\beta - R)x} \, dx$$

$$= \frac{\beta - R}{\beta} e^{-Ru_0} = C_1 e^{-Ru_0}.$$

2.4. Osasummien suurista poikkeamista

Olkoon satunnaisjono $\{Y_n\}$ kuten lauseessa 2.1. Olkoon $a > \mathbb{E}(\xi)$. Johdetaan seuraavassa asymptoottinen esitys todennäköisyydelle

$$(2.12) \qquad \mathbb{P}(Y_n/n > a), \quad n \to \infty.$$

Oletetaan, että $c(s) < \infty$ eräälle $s > 0$ ja että

$$c'(s) = a \quad \text{eräälle } s = s_a.$$

Lisäksi oletetaan, että $\xi - b$ ei ole aritmeettinen millään $b \in \mathbb{R}$.

Todennäköisyyden (2.12) arvioimisessa hyödynnetään seuraavaa tulosta.

Lemma 2.4. Edellä esitetyn lisäksi oletetaan, että $\mathbb{E}(\xi^3)$ on äärellisenä olemassa. Olkoon $\mu = \mathbb{E}(\xi)$, $\sigma^2 = \operatorname{Var} \xi$ ja

$$\gamma = \frac{\mathbb{E}((\xi-\mu)^3)}{\sigma^3} \qquad \text{(vinous)}.$$

Silloin

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x) - \frac{\gamma(1-x^2)\,\Phi'(x)}{6\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \to \infty,$$

tasaisesti alueessa $x \in \mathbb{R}$, missä Φ on standardi normaalijakauman kertymäfunktio.

Merkitään

$$\bar{Y}_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Todistus on esitetty lähteessä Feller (1971): An introduction to probability theory and its applications, luku XVI.4. Luvussa XVI.5 on todistettu, että myös

$$\left| \mathbb{P}(Y_n \le x) - \Phi(x) \right| \le \frac{3\rho}{\sigma^3 \sqrt{n}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

missä $\rho = \mathbb{E}(|\xi - \mu|^3)$. Kyseessä on ns. Berry–Esseen approksimaatio.

<u>Lause 2.5</u> Lemman 2.4 oletuksin

$$\lim_{n\to\infty} J_n\, \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} > a\right) = 1,$$

missä

$$J_n = s_a \sqrt{c''(s_a)\, 2\pi n}\; e^{n c^*(a)}.$$

Todistus. Tehdään muuttujiin ξ_j konjugaattimuunnos parametrilla s_a riippumattomuus säilyttäen. Saadaan

$$\mathbb{P}(Y_n > na) = \mathbb{E}_{s_a}\left[e^{-s_a Y_n + nc(s_a)} \mathbb{1}(Y_n > na)\right]$$

$$= e^{-nc^*(a)} \mathbb{E}_{s_a}\left[e^{-s_a Y_n + n s_a a} \mathbb{1}(Y_n > na)\right].$$

Olkoon

$$F_n(x) = \mathbb{P}_{s_a}\left(\frac{Y_n - na}{\sqrt{c''(s_a)n}} \le x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Silloin

$$\mathbb{E}_{s_a}\left[e^{-s_a Y_n + n s_a a} \mathbb{1}(Y_n > na)\right]$$

$$= \mathbb{E}_{s_a}\left[e^{-s_a \sqrt{c''(s_a)n}\left(\frac{Y_n - na}{\sqrt{c''(s_a)n}}\right)} \mathbb{1}\left(\frac{Y_n - na}{\sqrt{c''(s_a)n}} > 0\right)\right]$$

$$= \int_0^\infty e^{-s_a \sqrt{c''(s_a)n}\, x}\, dF_n(x).$$

Merkitään lyhyesti

$$\psi_n = s_a \sqrt{c''(s_a)n}.$$

Nyt

$$\int_0^\infty e^{-\psi_n x}\, dF_n(x) = \Big/_0^\infty e^{-\psi_n x} F_n(x) - \int_0^\infty F_n(x)\, d\left(e^{-\psi_n x}\right)$$

$$= -F_n(0) + \int_0^\infty \psi_n e^{-\psi_n x} F_n(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty \psi_n e^{-\psi_n x} \left[F_n(x) - F_n(0) \right] dx.$$

Siis

$$J_n\, \mathbb{P}(Y_n > na) = \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \psi_n^2 e^{-\psi_n x} \left[F_n(x) - F_n(0) \right] dx$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \psi_n e^{-x} \cdot \left[F_n\left(\tfrac{x}{\psi_n}\right) - F_n(0) \right] dx.$$

Lemman 2.4 nojalla

$$J_n\, \mathbb{P}(Y_n > na)$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \psi_n e^{-x} \Bigg[\phi\left(\tfrac{x}{\psi_n}\right) - \frac{\gamma_{s_a}\left(1 - \left(\tfrac{x}{\psi_n}\right)^2\right) \phi'\left(\tfrac{x}{\psi_n}\right)}{6\sqrt{n}}$$

$$- \phi(0) + \frac{\gamma_{s_a} \phi'(0)}{6\sqrt{n}} \Bigg] dx + o(1),$$

missä

$$\gamma_{s_a} = \mathbb{E}_{s_a}\left(\frac{(\xi - a)^3}{c''(a)^{3/2}} \right)$$

on ξ:n vinous konjugaattijakauman alaisuudessa. Integrandi on dominoitu, sillä väliarvolauseen nojalla

$$\left|\phi\left(\frac{x}{\psi_n}\right) - \phi(0)\right| \le \frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\psi_n}$$

ja

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |y^2 \phi'(y)| < \infty.$$ Lisäksi jokaisella kiinteällä

$x \in \mathbb{R}$,

$$\phi\left(\frac{x}{\psi_n}\right) = \phi(0) + \frac{x}{\psi_n}\phi'(0)(1+o(1)), \quad n\to\infty,$$

ja

$$\phi'\left(\frac{x}{\psi_n}\right) = \phi'(0) + \phi''(0)\frac{x}{\psi_n}(1+o(1)), \quad n\to\infty,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n e^{-x}\left[\phi\left(\frac{x}{\psi_n}\right) - \frac{\gamma_{S_n}\left(1-\left(\frac{x}{\psi_n}\right)^2\right)\phi'\left(\frac{x}{\psi_n}\right)}{6\sqrt{n}} - \phi(0) + \frac{\gamma_{S_n}\phi'(0)}{6\sqrt{n}}\right]$$

$$= \phi'(0)\, x e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x e^{-x}.$$

Siispä dominoidun konvergenssin nojalla

$$\lim_{n\to\infty} J_n\, \mathbb{P}(Y_n > na) = \int_0^\infty x e^{-x}\,dx = 1. \quad \square$$