Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 6, 24.4.2014
Huom. Harjoitus on poikkeuksellisesti torstaina klo 14 salissa C124.

Kaikissa tehtävissä $d, d_1, d_2, \ldots$ ja $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ ovat kaksi jonoa riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan, että $\mathbb{P}(d > 0) = 1$ ja että ξ-muuttujat ovat riippumattomia d-muuttujista. Määritellään parametrit $\alpha_\xi, \alpha_d \in [0, \infty]$ ehdoista

$$\limsup_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) = -\alpha_\xi$$

ja

$$\limsup_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(d > x) = -\alpha_d.$$

Olkoon kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $U_0 \geq 0$,

$$\begin{aligned} Y'_n &= \sum_{j=1}^{n} d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j, \\ T &= \inf\{n | Y'_n > U_0\}. \end{aligned}$$

1. Olkoon $N \in \mathbb{N}$ kiinteä ja $N \geq 2$. Osoita, että

$$\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq N) \leq -\min(\alpha_d, \alpha_\xi).$$

2. (jatkoa) Osoita, että

$$\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq N) = -\min(\alpha_d, \alpha_\xi).$$

3. Oletetaan, että d on log-normaalisti jakautunut parametreilla μ, σ, missä $\mu < 0$ ja $\sigma > 0$. Siis tiheysfunktio s on

$$s(z) = \frac{1}{\sigma z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log z - \mu)^2}, \quad z > 0.$$

Oletetaan lisäksi, että $\mathbb{P}(|\xi| \leq M) = 1$ eräälle $M > 0$. Osoita, että

$$\lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = \frac{2\mu}{\sigma^2}.$$

4. Oletetaan, että on olemassa sellainen yksikäsitteinen $R' > 2$, että $\mathbb{E}(d^{R'}) = 1$ ja että $\mathbb{E}(\mid \xi \mid^s) < \infty$ kaikilla $s \in \mathbb{R}$. Olkoon

$$Y'_\infty = \lim_{n \to \infty} Y'_n.$$

Osoita, että

$$Y'_\infty =_L \xi + d Y'_\infty,$$

missä oikealla puolella ξ, d ja Y'_∞ ovat riippumattomia.

5. (jatkoa) Määrää raja-arvon Y'_∞ odotusarvo ja varianssi muuttujien ξ ja d momenttien avulla.