Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 5, 14.4.2014

Kaikissa tehtävissä $\xi = X - P$, missä

$$X = Z_1 + \cdots + Z_K,$$

$Z, Z_1, Z_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, K on Z-muuttujista riippumaton lukumäärämuuttuja ja P on vakio. Olkoon S Z-muuttujien yhteinen kertymäfunktio ja $\mathbb{E}(K) = \lambda$. Siis X on yhdistetty muuttuja parametrilla (K, S). Oletetaan, että

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \overline{S}(x) = -\alpha,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$, ja että

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{S}(x(1-\epsilon))}{\overline{S}(x)} = 1.$$

Oletetaan lisäksi, että K on kevythäntäinen eli että $\mathbb{E}(e^{sK}) < \infty$ jollain $s > 0$. Laajennetaan esimerkin 3.1 tulos koskemaan edellä kuvattua mallia (esimerkissä oletettiin, että K on Poisson-jakautunut).

1. Osoita, että

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\xi > x)}{\lambda \overline{S}(x)} \geq 1.$$

2. (jatkoa) Olkoon $\gamma > 0$ kiinteä ja $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n, n = 1, 2, \ldots$. Osoita, että

$$\mathbb{P}(S_n > x) \leq n\mathbb{P}(S_n > x, Z_1 > x/(\gamma \log x)),$$

kun $x > 1$ ja $n \leq \gamma \log x$.

3. (jatkoa) Olkoot $\delta > 0$ ja $\epsilon \in (0, 1)$ kiinteitä. Osoita, että om olemassa sellainen $x_0 > 0$, että

$$\mathbb{P}(S_n > x) \leq n\overline{S}((1-\epsilon)x) + x^{-2\alpha+\delta}$$

kaikilla $x > x_0$ ja $n \leq \gamma \log x$.

4. (jatkoa) Osoita, että

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\xi > x, K \leq \gamma \log x)}{\lambda \overline{S}(x)} \leq 1.$$

5. (jatkoa) Osoita, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\xi > x)}{\lambda \overline{S}(x)} = 1.$$