

Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 4, 31.3.2014

Huom. Jäljellä olevat laskuharjoitukset ovat ma 14.4. klo 16-18 (sali B321)

ja to 24.4. klo 14-16 (sali C124)

Huom. Ti 15.4. on ylimääräinen luento klo 16-18, sali C124; to 24.4. ei ole luentoa.

Kaikissa tehtävissä $Y_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, missä ξ, ξ_1, ξ_2, \dots ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Lisäksi $U_0 > 0$ kuvaa yhtiön alkupääomaa ja T on vararikkoehetki. Oletetaan myös, että $\mathbb{E}(\xi) \in (-\infty, 0)$ ja että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) = -\alpha,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$. Okoon F ξ -muuttujien yhteinen kertymäfunktio.

1. Oletetaan lisäksi, että

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x(1-\epsilon))}{\bar{F}(x)} = 1.$$

Olkkoon $N \in \mathbb{N}$ kiinteä ja $\epsilon > 0$ pieni. Osoita, että

$$\{\xi_1 > (1+\epsilon)U_0, \xi_2, \dots, \xi_N \in (-\epsilon U_0/N, (1+\epsilon)U_0)\} \subseteq \{S_N > U_0\}$$

ja että

$$\liminf_{U_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_N > U_0)}{N\bar{F}(U_0)} \geq 1.$$

2. (jatkoa) Olkkoon $i, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j$. Osoita, että

$$\mathbb{P}(\xi_i > \epsilon U_0, \xi_j > \epsilon U_0) = o(1)\bar{F}(U_0)$$

ja että

$$\lim_{U_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_N > U_0)}{N\bar{F}(U_0)} = 1.$$

3. Osoita lauseen 3.7 merkinnöin ja todistusta mukaillen, että mielivaltaisille $0 < \delta < b$,

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0) \geq (1 + o(1)) \int_{\delta U_0}^{bU_0} \bar{F}(U_0 - \mu t) dt, \quad U_0 \rightarrow \infty.$$

4. (jatkoa) Osoita, että mielivaltaiselle $b > 0$,

$$\mathbb{P}(T \leq bU_0) \geq (1 + o(1)) \int_0^{bU_0} \bar{F}(U_0 - \mu t) dt, \quad U_0 \rightarrow \infty.$$

5. (jatkoa) Oletetaan lisäksi, että eräälle $x_0 > 0$,

$$\bar{F}(x) = x^{-\alpha}, \quad \forall x \geq x_0.$$

Osoita, että

$$\mathbb{P}(T < \infty) \geq (1 + o(1)) \int_0^\infty \bar{F}(U_0 - \mu t) dt, \quad U_0 \rightarrow \infty.$$