Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 3, 17.3.2014

Palutetaan mieleen momentti-indeksejä koskeva esitys: jos ξ on mielivaltainen satunnaismuuttuja, niin

$$\limsup_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) = -\sup\left\{s \geq 0 \,|\, \mathbb{E}\left(\xi^s \mathbb{1}(\xi \geq 0)\right) < \infty\right\},$$

sekä Minkowskin epäyhtälö: jos ξ ja η ovat mielivaltaisia satunnaismuuttujia ja $p > 1$, niin

$$\mathbb{E}\left(|\xi + \eta|^p\right)^{1/p} \leq \mathbb{E}\left(|\xi|^p\right)^{1/p} + \mathbb{E}\left(|\eta|^p\right)^{1/p}.$$

1. Olkoot ξ_1 ja ξ_2 ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Oletetaan, että

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi_i > x) = -\alpha, \quad i = 1, 2,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$. Osoita, että

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 > x) = -\alpha$$

(ei siis oleteta, että ξ_1 ja ξ_2 ovat riippumattomia).

2. Olkoot $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia ja $X = Z_1 + \cdots + Z_K$ yhdistetty Poisson-muuttuja. Oletetaan, että

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(Z > x) = -\alpha,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$. Osoita, että

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(X > x) = -\alpha.$$

3. Olkoot yhtiön vuotuiset tappiot riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan lisäksi, että tappiot ovat muotoa $X_1 + X_2 - P_1 - P_2$, missä X_i ja P_i kuvaavat vakuutuslajin i vuotuista kokonaisvahinkomäärää ja vakuutusmaksua, $i = 1, 2$. Oletetaan, että $P_i > \mathbb{E}(X_i)$ ja että

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(X_i > x) = -\alpha_i,$$

missä $\alpha_i \in (1, \infty)$, $i = 1, 2$. Olkoot lisäksi X_1 ja X_2 riippumattomia ja $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Olkoon U_0 alkupääoma ja T vararikkohetki. Osoita, että

$$\lim_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = 1 - \alpha.$$

4. Olkoot $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$Y_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Olkoon U_0 alkupääoma ja T vararikkohetki. Oletetaan, että

$$\limsup_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) = -\bar{\alpha}.$$

missä $1 < \bar{\alpha} < \infty$. Osoita, että

$$\limsup_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq U_0) \leq 1 - \bar{\alpha}.$$

5. (jatkoa) Osoita, että

$$\limsup_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq U_0) = 1 - \bar{\alpha}.$$