Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 1, 3.2.2014

1. Olkoon F ei-aritmeettisen jakauman kertymäfunktio, $F(0) = 0$ ja $\alpha \in (0, 1)$. Olkoon G yhdistetyn geometrisen jakauman kertymäfunktio,

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^k F^{k*}(x), \quad x \geq 0.$$

Osoita, että G toteuttaa (vajaan) uusiutumisyhtälön

$$G(x) = \alpha + (1-\alpha)\int_0^x G(x-y)dF(y), \quad x \geq 0.$$

2. (jatkoa) Merkitään yleisesti $\bar{H}(x) = 1 - H(x)$. Todista, että

$$\bar{G}(x) = (1-\alpha)\bar{F}(x) + (1-\alpha)\int_0^x \bar{G}(x-y)dF(y), \quad x \geq 0,$$

3. (jatkoa) Olkoon c jakaumaan F liittyvä kumulantit generoiva funktio,

$$c(s) = \log \int_{x\in\mathbb{R}} e^{sx}dF(x), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Olkoon $t \in \mathbb{R}$ sellainen, että $c(t) < \infty$ ja olkoon $Z(x) = e^{tx}\bar{G}(x)$. Osoita, että

$$Z(x) = (1-\alpha)e^{tx}\bar{F}(x) + (1-\alpha)e^{c(t)}\int_0^x Z(x-y)dF_t(y), \quad x \geq 0,$$

missä F_t on konjugaattijakauman kertymäfunktio, $dF_t(y) = e^{ty-c(t)}dF(y), \quad y \geq 0.$

4. (jatkoa) Oletetaan, että t voidaan valita siten, että $c(t) = -\log(1-\alpha)$ ja että $c(s) < \infty$ eräälle $s > t$. Osoita, että

$$\lim_{x\to\infty} e^{tx}\bar{G}(x) = \frac{1-\alpha}{\mu_t}\int_0^{\infty} e^{ty}\bar{F}(y)dy,$$

missä $\mu_t = \int_0^{\infty} ydF_t(y)$.

5. (jatkoa) Olkoon satunnaiskulku $\{Y_n\}$ kuten lauseessa 2.1. Määritellään

$$\tau_0 = 0 \quad \text{ja} \quad Y_0 = 0$$

sekä

$$\tau_{k+1} = \inf\{n > \tau_k | Y_n > Y_{\tau_k}\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

missä $\tau_{k+1} = \infty$, jos $\tau_k = \infty$ tai $Y_n \leq Y_{\tau_k}, \forall n$. Olkoon $\alpha = \mathbb{P}(\tau_1 = \infty)$ ja $\bar{Y} = \sup\{Y_n | n \geq 1\}$. Perustele lyhyesti, miksi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T(U_0) < \infty) &= \mathbb{P}(\bar{Y} > U_0) \\ &= \mathbb{P}(X > U_0), \end{aligned}$$

missä X on yhdistetty muuttuja parametrilla (K, F), K on geometrisesti jakautunut parametrilla α ($\mathbb{P}(K = 0) = \alpha$)) ja

$$F(x) = \mathbb{P}(Y_{\tau_1} \leq x | \tau_1 < \infty), \quad x \geq 0.$$