Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 6
2.5.2014

1. (a) Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Osoita, että jokainen G:n piste on G:n tiheyspiste.
   (b) Näytä esimerkillä, että myös avoimen joukon G komplementin piste voi olla G:n tiheyspiste.
   (c) Konstruoi sellainen $\mathbb{R}$:n osajoukko A, joka ei ole avoin, vaikka jokainen piste $x \in A$ on A:n tiheyspiste.

2. Olkoon $\mathbb{Q} = \{q_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ rationaalilukujen joukko. Asetetaan
$$f(x) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ q_k \leq x}} 2^{-k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
   Osoita:
   (a) $f \colon \mathbb{R} \to (0,1)$ on aidosti kasvava.
   (b) f on jatkuva pisteessä $x \iff x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. Olkoot $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitetusti heilahtelevia. Osoita, että
$$V_{fg}(a,b) \leq M_f V_g(a,b) + M_g V_f(a,b),$$
   missä $M_f = \sup\{|f(x)| \colon x \in [a,b]\}$ ja $M_g = \sup\{|g(x)| \colon x \in [a,b]\}$.

4. (a) Tarkista, että jokainen rajoitetusti heilahteleva funktio on rajoitettu.
   (b) Olkoon $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva. Osoita, että f on jatkuva ja rajoitetusti heilahteleva.

5. Olkoon $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva ja $E \subset [a,b]$ 0-mittainen joukko ($m(E) = 0$). Osoita, että myös kuvajoukko fE on 0-mittainen.

6. Onko funktio $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{\pi}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
   absoluuttisesti jatkuva?