Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 5
24-25.4.2014

1. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $f \in L^p(X)$ ja $t > 0$. Johda *Chebyshevin epäyhtälö*

$$\mu\big(\{x \in X \colon |f(x)| > t\}\big) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{t}\right)^p .$$

2. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $f \colon X \to [0, +\infty]$ mitallinen ja $0 < p < \infty$. Osoita, että

$$\int_X f^p d\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu\big(\{x \in X \colon f(x) > t\}\big) dt .$$

3. Sanomme, että mitallinen funktio $f \colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ kuuluu "heikkoon L^1-avaruuteen" weak-$L^1(\mathbb{R}^n)$, jos on olemassa vakio $c = c_f < \infty$ siten, että

$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^n \colon |f(x)| > t\}\big) \leq \frac{c}{t} \quad \forall t > 0.$$

   (a) Totea, että $L^1(\mathbb{R}^n) \subset$ weak-$L^1(\mathbb{R}^n)$.
   (b) Osoita esimerkin avulla, että weak-$L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$.

4. Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ "keskitetty" maksimaalifunktio $\tilde{M}f \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ määritellään asettamalla

$$\tilde{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

   (a) Osoita, että $\tilde{M}f(x) \leq Mf(x) \leq 2^n \tilde{M}f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, kun $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.
   (b) Olkoon $f = \chi_{[a,b]}$, $a < b$. Määritä Mf ja $\tilde{M}f$ ja vertaa tulosta (a)-kohtaan.

5. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että $Mf(x) < +\infty$ m.k. $x \in \mathbb{R}^n$.

6. Olkoon $f \colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen. Osoita, että jokaisella $t > 0$ pätee:

$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^n \colon Mf(x) > t\} \leq \frac{2 \cdot 5^n}{t} \int_{\{x \colon |f(x)| > t/2\}} |f(y)| dy.$$