Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 3
3-4.4.2014

1. Olkoon $\mu(X) < \infty$. Osoita, että kaikilla $f \in L^\infty(\mu)$ pätee
$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$
Päteekö tämä ilman oletusta $\mu(X) < \infty$? Perustele vastauksesi.

2. Oletetaan, että $f \in L^r$ jollakin $r \in]1,\infty[$. Osoita, että
$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

3. Olkoon $f \in L^p(X), p > 1$. Osoita, että on olemassa sellainen $g \in L^q(X),\ q = \frac{p}{p-1}$, että $\|g\|_q = 1$ ja
$$\int_X fg\, d\mu = \|f\|_p.$$
Johtopäätös?

4. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus, jolle $\mu(A) \geq 1$ aina kun $A \in \Gamma$ ja $\mu(A) > 0$. Oletetaan, että $1 \leq p < q \leq \infty$. Osoita, että $L^p \subset L^q$ ja
$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_q \leq \|f\|_p \leq \|f\|_1.$$

5. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus ja $1 \leq p, q < \infty$.
   (a) Oletetaan, että $f_i \in L^p,\ i \in \mathbb{N},\ \|f_i - f\|_p \to 0$ ja $f_i \to g$ m.k. Osoita, että $f = g$ m.k.
   (b) Oletetaan, että $f_i \in L^p \cap L^q,\ i \in \mathbb{N},\ \|f_i - f\|_p \to 0$ ja $\|f_i - g\|_q \to 0$ m.k. Osoita, että $f = g$ m.k.

6. Osoita, ettei Egorovin lauseessa voida yleensä valita joukkoa F siten, että $\mu(X \setminus F) = 0$.