Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 2
27-28.3.2014

1. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus ja olkoon $f \in L^\infty(X)$. Osoita, että
$$\|f\|_\infty = \inf\big\{\sup\{|f(x)| \colon x \in X \setminus N\} \colon N \in \Gamma, \mu(N) = 0\big\}.$$

2. Olkoon $\mu(X) < \infty$ ja $1 \le q < p < \infty$.
   (a) Osoita *käyttämättä* Hölderin epäyhtälöä, että $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$.
   (b) Osoita (Hölderin epäyhtälöllä), että
$$\|f\|_q \le \|f\|_p \, (\mu(X))^{(p-q)/pq} ,$$
   kun $f \in L^p(\mu)$.

3. Olkoon (f_j) jono ei-negatiivisia Lebesguen mitallisia funktioita $f_j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että
$$\int_{\mathbb{R}} f_j \, dm \to 0.$$
Päteekö tällöin, että $f_j(x) \to 0$ m.k. $x \in \mathbb{R}$. [Perustelut!]

4. Olkoon $f \colon B^n(0,1) \to \dot{\mathbb{R}}$, $f(x) = \log|x|$. Millä p:n arvoilla $f \in L^p(B^n(0,1))$?

5. Oletetaan, että $f \in L^p$ ja $g \in L^q$, missä $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ jollain $r \ge 1$. Osoita, että $fg \in L^r$ ja $\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$.

6. Oletetaan, että $f, f_k \in L^1(\mu)$, $f_k \ge 0$, $k \in \mathbb{N}$, ja $\liminf_{k\to\infty} f_k(x) \ge f(x)$ μ-m.k. $x \in X$. Oletetaan lisäksi, että
$$\int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu = 1$$
kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että
$$\int_X |f_k - f| d\mu \to 0.$$