Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 1
20-21.3.2014

1. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $E \in \Gamma$. Osoita, että
   (a) $\Gamma_E = \{A \in \Gamma \colon A \subset E\}$ on σ-algebra E:ssä ja
   (b) $\mu|\Gamma_E$ on mitta E:ssä.

2. Olkoon X epätyhjä joukko. Määritellään $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ asettamalla $\mu^*(\emptyset) = 0$ ja $\mu^*(A) = 1$, jos $A \neq \emptyset$. Osoita, että μ^* on ulkomitta. Mitä ovat μ^*-mitalliset joukot?

3. Olkoot $I = [0, 1] \times [0, 1]$ ja $f(x, y) = (x - y)/(x + y)^3$, kun $(x, y) \in I \setminus \{(0, 0)\}$, sekä $f(0, 0) = 0$. Laske integraalit
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx \quad \text{ja} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dx \right) dy.$$
   Onko f integroituva yli I:n?

4. Määritellään jokaista $A \subset \mathbb{R}^n$ kohti joukko
$$\tilde{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \colon x - y \in A\}.$$
   Osoita, että $m_{2n}(\tilde{A}) = 0$, jos $m_n(A) = 0$.

5. Osoita, että $B \subset \mathbb{R}$ on Borel-joukko, jos ja vain jos se on Borel-joukko myös tasossa. Toisin sanoen,
$$\operatorname{Bor} \mathbb{R} = \{B \subset \mathbb{R} \colon \{(x, 0) \colon x \in B\} \in \operatorname{Bor} \mathbb{R}^2\}.$$
   Onko Lebesgue-mitallisten joukkojen σ-algebroilla $\operatorname{Leb} \mathbb{R}$ ja $\operatorname{Leb} \mathbb{R}^2$ samanlainen yhteys?

6. Etsi sellainen jono $p = (p_1, p_2, \ldots)$, että sitä vastaavan Cantorin joukon mitta on $\frac{1}{3}$.