Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, luentoviikko 8

Petri Ola

Helsingin yliopisto

18.03.2014

Keskiarvoperiaate I

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avoin, ja $u \in C^2(\Omega)$. Funktio u on harmoninen Ω:ssa täsmälleen silloin kun sille pätee *keskiarvoperiaate*: Jokaisella $x \in \Omega$ ja luvulla $r_0 > 0$ jolle $B(x, r_0) \subset \Omega$, pätee

$$u(x) = \frac{1}{r^{d-1}\omega_d} \int_{\partial B(x,r)} u \, dS, \; 0 < r < r_0.$$

Todistus. Olkoon

$$\phi(r) = \frac{1}{r^{d-1}\omega_d} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS(y) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial B(0,1)} u(x + r\omega) \, dS(\omega).$$

Osoitetaan, että ϕ on vakio, jolloin väite seuraa sillä $\lim_{r \to +0} \phi(r) = u(x)$.

Keskiarvoperiaate II

Derivoimalla saamme

$$\phi'(r) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial B(0,1)} \langle \omega, \nabla u(x + r\omega) \rangle \, dS(\omega).$$

Nyt $\omega = (y - x)/r$ on reunan $\partial B(x, r)$ ulkonormaali ν, joten palaamalla takaisin y–muuttujaan, saamme Gaussin kaavan nojalla

$$\phi'(r) = \frac{1}{r^{d-1}\omega_d} \int_{\partial B(x,r)} \partial_\nu u(y) \, dS(y) = \frac{1}{r^{d-1}\omega_d} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) \, dy = 0,$$

mikäli u on harmoninen. Tämä todistaa väitteen toisen puolen. Kääntäen, mikäli keskiarvoperiaate pätee u:lle on ϕ yllä vakio ja Δu:n integraali yli kaikkien avoimien Ω:aan sisältyvien kuulien on $= 0$, joten jatkuvuuden nojalla $\Delta u = 0$ Ω:ssa.

Vahva maksimiperiaate

Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ on rajoitettu ja yhtenäinen. Jos u on Ω:ssa harmoninen funktio, joka saavuttaa maksiminsa alueen Ω jossain sisäpisteessä x_0, niin u on vakio.

Todistus. Jos $B(x_0, r_0) \subset \Omega$, niin kaikilla $0 < r < r_0$ pätee

$$u(x_0) = \frac{1}{r^{d-1}\omega_d} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y),$$

joten koska $u(x_0)$ on maksimi, on oltava $u = u(x_0)$ koko kiekossa $B(x_0, r_0)$. Näin ollen joukko

$$A = \{x \in \Omega;\ u(x) = u(x_0)\}$$

on avoin. Toisaalta jatkuvuuden nojalla myös

$$B = \{x \in \Omega;\ u(x) < u(x_0)\}$$

on avoin. Koska Ω on yhtenäinen, on joko $A = \emptyset$ tai $B = \emptyset$. Väite seuraa tästä.

Liouvillen lause

Olkoon u koko $\mathbb{R}^d$:ssä harmoninen funktio. Jos u on rajoitettu, on se vakio.

Todistus. Luennolla esitetyn estimaatin nojalla kaikilla $r > 0$ pätee

$$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{C}{r^{d+1}} \|u\|_{L^1(B(x,r))} = \mathcal{O}(r^{-1}),$$

joten antamalla $r \to \infty$ saamme $\nabla u = 0$, ja siis u on vakio.

Seuraus. Olkoon $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ ja $d \geq 3$. Tällöin jokainen yhtälön $\Delta u = f$ rajoitettu ratkaisu on muotoa

$$u(x) = \int \Phi(x-y) f(y)\, dy + \mathrm{vakio}.$$

Todistus. Olkoon $u_f(x) = \int \Phi(x-y) f(y)\, dy$. Nyt $u - u_f$ on rajoitettu ja $\Delta u_f = f$, joten funktio $u - u_f$ on rajoitettu ja harmoninen koko $\mathbb{R}^d$:ssä, ja siis vakio.

Greenin funktio

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ rajoitettu C^1–alue. Jos v on mielivaltainen Ω:ssa harmoninen funktio, niin Greenin kaavojen ja aikaisemmin todistetun esityskaavan nojalla kaikilla $x \in \Omega$ pätee jokaiselle Ω:ssa harmoniselle u:lle

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y)\partial_{\nu(y)}\{\Phi(x-y) - v(y)\} - \partial_\nu u(y)\{\Phi(x-y) - v(y)\}\, dS(y).$$

Pyritään nyt valitsemaan pisteestä x riippuva harmoninen funktio $v = v_x$ siten, että reunalla $\partial\Omega$ pätee $\Phi(x-y) - v_x(y) = 0$. Mikäli tämä onnistuu, merkitään $G(x,y) = \Phi(x-y) - v_x(y)$, ja kutsutaan tätä alueen Ω Dirichlet–Greenin funktioksi. SIten, jos $\Delta u = 0$ koko Ω:ssa, saamme esityskaavan muotoon

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y)\partial_{\nu(y)} G(x,y)\, dS(y).$$

Greenin funktio ylemmälle puoliavaruudelle

Olkoon

$$\mathbb{R}^d_+ = \{x \in \mathbb{R}^d;\ x_d > 0\}.$$

Määritellään pisteen $x = (x_1, \ldots, x_d)$ peilipiste

$$\widetilde{x} = (x_1, \ldots, -x_d).$$

Jos $x \in \mathbb{R}^d_+$, niin funktio $y \mapsto \Phi(\widetilde{x} - y)$ on harmoninen ylemmässä puoliavaruudessa, ja koska

$$|x - y| = |\widetilde{x} - y|$$

kun $y_d = 0$, on

$$G(x - y) = \Phi(x - y) - \Phi(\widetilde{x} - y)$$

Greenin funktio ylemmässä puoliavaruudessa.