# Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, luentoviikko 7

Petri Ola

Helsingin yliopisto

11.03.2014

# Laplace–operaattorin perusratkaisu

Laplace–operaattori $\mathbb{R}^d$:ssä määritellään kaavalla

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}, \; x \in \mathbb{R}^d.$$

Funktio $u \in C^2(\Omega)$ on *harmoninen* $\Omega$:ssa ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$ on avoin) jos

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Funktio

$$\Phi(x) = \begin{cases} \ln|x|/2\pi, \; x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ |x|^{2-d}/(2-d)\omega_d, \; x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \; d \geq 3, \end{cases}$$

on $\Delta$:n *perusratkaisu*. Tässä $\omega_d$ on $\mathbb{R}^d$:n yksikköpallon pinta–ala.

# Poissonin yhtälön ratkaisu

Olkoon $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$. Tällöin funktio

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y)\, f(y)\, dy$$

toteuttaa Poissonin yhtälön

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Tämä ei suinkaan ole ainoa ratkaisu: jos esimerkiksi $h$ on mikä tahansa koko $\mathbb{R}^d$:ssä harmoninen funktio, niin edelleen

$$\Delta(u+h) = f.$$

# Todistus - osa I

Sen todistamiseen, että

$$\Delta \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y)\, f(y)\, dy = f(x)$$

käytetään Greenin kaavoja. Olkoon nyt $x$ kiinteä. Tällöin muuttujanvaihdolla

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y)\, f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y)\, f(x-y)\, dy,$$

joten koska $f$ on kompaktikantajainen, niin

$$\Delta \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y)\, f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y)\, (\Delta f)(x-y)\, dy.$$

Valitaan nyt $R > 0$ siten että $f(x-y) = 0$ kun $|y| \geq R$.

# Todistus - osa II

Nyt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y)\,\Delta f(x-y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|<R} \Phi(y)\,\Delta f(x-y)\,dy.$$

Koska $\Delta\Phi(y) = 0$ kun $y \neq 0$, niin Greenin toisesta kaavasta seuraa

$$\int_{\varepsilon<|y|<R} \Phi(y)\,\Delta f(x-y)\,dy = \int_{|y|=\varepsilon} \frac{\partial\Phi(y)}{\partial\mathbf{r}} f(x-y) - \Phi(y)\frac{\partial f(x-y)}{\partial\mathbf{r}}\,dS.$$

Tässä $\mathbf{r} = y/|y|$. Antamalla $\varepsilon \to 0$ saamme

$$\int_{|y|=\varepsilon} \frac{\partial\Phi(y)}{\partial\mathbf{r}} f(x-y) dS \to f(x),\ \int_{|y|=\varepsilon} \Phi(y)\frac{\partial f(x-y)}{\partial\mathbf{r}}\,dS \to 0.$$

Tämä todistaa väitteen.

# Esityskaava

Samaan tapaan on mahdollista todistaa seuraava esityskaava ratkaisulle: **oletamme**, että $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ toteuttaa yhtälön

$$\Delta u = f \in C(\overline{\Omega})$$

rajoitetussa aluessa $\Omega$. Tällöin kaikilla $x \in \Omega$ pätee

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_\Omega \Phi(x-y)\, f/y)\, dy \\ &+ \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\Phi(x-y)}{\partial n(y)} - \Phi(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n(y)}\, dS(y). \end{aligned}$$

Todistus seuraa soveltamalla Greenin kaavoja alueessa $\Omega \setminus \overline{B(x,\varepsilon)}$ ja antamalla $\varepsilon \to 0$.

# Heikko maksimiperiaate

**Teoreema.** Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ on rajoitettu ja avoin. Jos $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ on harmoninen $\Omega$:ssa, niin

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

**Todistus:** Oletetaan ensin että $\Delta u > 0$ koko $\Omega$:ssa. Jos $x_0 \in \Omega$ on lokaali maksimi, niin

$$\frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i^2} \leq 0,\ i = 1, \ldots, d,$$

ja summaamalla yli $i$:n saamme $\Delta u \leq 0$, joka on ristiriita joten $u$:lla ei voi olla lokaaleja maksimeja sisäpisteissä.

# Todistuksen loppuosa

Oletetaan nyt että $\Delta u = 0$ $\Omega$:ssa. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja määritellään

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon |x|^2.$$

Tällöin

$$\Delta u_\varepsilon = \Delta u + \varepsilon \Delta(|x|^2) = 2d\varepsilon > 0.$$

Soveltamalla todistuksen alkuosaa funktioon $u_\varepsilon$ saamme

$$\begin{aligned} \max_{\partial\Omega} u &\leq \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \\ &= \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon D^2, \end{aligned}$$

missä $D = \sup_\Omega |x|$. Antamalla tässä $\varepsilon \to 0$ saamme väitteen.